II. Megoldás.[1] Tudvalevőleg tetszőleges t és positív egész n és s mellett, ha $|x| < 1$

$$(1+x)^{n+t} = \binom{n+t}{0} + \binom{n+t}{1}x + \binom{n+t}{2}x^2 + \cdots +$$

$$+\binom{n+t}{n}x^n + \binom{n+t}{n+1} + x^{n+1} + \cdots + \binom{n+t}{n+s}x^{n+s} + \ldots$$

$$(1+x)^{n+t-1} = \binom{n+t-1}{0} + \binom{n+t-1}{1}x + \binom{n+t-1}{2}x^2 + \cdots +$$

$$+\binom{n+t-1}{n}x^n + \binom{n+t-1}{n+1}x^{n+1} + \cdots + \binom{n+t-1}{n+s}x^{n+s} + \ldots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(1+x)^{t} = \binom{t}{0} + \binom{t}{1}x + \binom{t}{2}x^2 + \cdots +$$

$$+\binom{t}{n}x^n + \binom{t}{n+1}x^{n+1} + \cdots + \binom{t}{n+s}x^{n+s} + \ldots$$

Szorozzuk a jobb és baloldalt sorban $\binom{n}{0}$, $-\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}, \ldots,$ $(-1)^n\binom{n}{n}$-tel; akkor a baloldal $(1+x)^t$ kiemelésével ily alakot vesz fel

$$(1+x)^t\left[\binom{n}{0}(1+x)^n - \binom{n}{1}(1+x^{n-1} + \binom{n}{2}(1+x^{n-2} + \cdots + (-1)^n\binom{n}{n}\right] =$$

$$= (1+x)^t[(1+x)-1]^n = (1+x)^t \cdot x^n(0 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 + \cdots +$$

$$+\binom{t}{0}x^n + \binom{t}{1}x^{n+1} + \binom{t}{2}x^{n+2} + \cdots + \binom{t}{s}x^{n+s} + \ldots$$

Minthogy a szorzás után is a bal- és jobboldalon az x egyforma hatványai mellett levő együtthatóknak egyenlőknek kell lenniök, azért a következő formulasort nyerjük, a melyben a bebizonyítandó is helyet foglal:

$$0 = \binom{n}{0}\binom{n+t}{0} - \binom{n}{1}\binom{n+t-1}{0} + \binom{n}{2}\binom{n+t-2}{0} + \cdots + (-1)^n\binom{n}{n}\binom{t}{0}$$

$$0 = \binom{n}{0}\binom{n+t}{1} - \binom{n}{1}\binom{n+t-1}{1} + \binom{n}{2}\binom{n+t-2}{1} + \cdots + (-1)^n\binom{n}{n}\binom{t}{1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$0 = \binom{n}{0}\binom{n+t}{n-1} - \binom{n}{1}\binom{n+t-1}{n-1} + \binom{n}{2}\binom{n+t-2}{n-1} + \cdots + (-1)^n\binom{n}{n}\binom{t}{n-1}$$

továbbá

$$1 = \binom{t}{0} = \binom{n}{0}\binom{n+t}{n} - \binom{n}{1}\binom{n+t-1}{n} + \binom{n+t-2}{n} + \cdots + (-1)^n\binom{n}{n}\binom{t}{n}$$

azonfelül

$$\binom{t}{1} = \binom{n}{0}\binom{n+t}{n+1} - \binom{n}{1}\binom{n+t-1}{n+1} + \binom{n}{2}\binom{n+t-2}{n+1} + \cdots + (-1)^n\binom{n}{n}\binom{t}{n+1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\binom{t}{s} = \binom{n}{0}\binom{n+t}{n+s} - \binom{n}{1}\binom{n+t-1}{n+s} + \binom{n}{2}\binom{n+t-2}{n+s} + \cdots + (-1)^n\binom{n}{n}\binom{t}{n+s}.$$

Látjuk, hogy e megoldás a feladatnak általánosítását is tartalmazza.

Dr. Lóky Béla, kegyesrendi tanár, Kolozsvár.

[1] + E faladatnak egy másik megoldását lásd: K.M.L.VII.73.l.