Mielőtt tételünket bebizonyítanók, kimutatjuk a következő egyenlőség helyességét:

$$\binom{m+n}{r} = \binom{m}{r} + \binom{m}{r-1}\binom{n}{1} + \binom{m}{r-2}\binom{n}{2} + \ldots + \binom{m}{1}\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}.$$

Ismeretes, hogy

$$(1) \qquad (1+a)^m = 1 + \binom{m}{1}a + \binom{m}{2}a^2 + \ldots + \binom{m}{r}a^r \ldots$$

$$(2) \qquad (1+a)^n = 1 + \binom{n}{1}a + \binom{n}{2}a^2 + \ldots + \binom{n}{r}a^r \ldots$$

$$(3) \qquad (1+a)^{m+n} = 1 + \binom{m+n}{1}a + \binom{m+n}{2}a^2 + \ldots + \binom{m+n}{r}a^r + \ldots$$

Ha (1)-et (2)-vel megszorozzuk, akkor ered:

$$(1+a)^m \cdot (1+a)^n = (1+a)^{m+n} =$$

$$\begin{array}{lllll}
= 1 + \binom{m}{1}a & + \binom{m}{2}a^2 & + \binom{m}{3}a^3 & + \ldots + \binom{m}{r}a^r & + \ldots \\
\quad \binom{n}{1} & \binom{m}{1}\binom{n}{1} & \binom{m}{2}\binom{n}{1} & \binom{m}{r-1}\binom{n}{1} & \\
 & \binom{n}{2} & \binom{m}{1}\binom{n}{2} & \binom{m}{r-2}\binom{n}{2} & (4) \\
 & & \binom{n}{3} & \vdots & \\
 & & & \binom{m}{1}\binom{n}{r-1} & \\
 & & & \binom{n}{r} &
\end{array}$$

A (3)-ban és (4)-ben összehasonlítva a^r-nek együtthatóit, közvetlenül beláthatjuk segédtételünk helyességét; m és n tetszőleges számok, mert a binomiális tétel minden kitevőre helyes, r azonban, mint a természetes számsor $(1,\ 2,\ 3, \ldots)$ tagja, csakis positív, egész szám lehet.

Minthogy feladatunkban n positív, egész szám, azért segédtételünk értelmében:

$$\binom{n+t}{n} = \binom{n}{n} + \binom{n}{n-1}\binom{t}{1} + \binom{n}{n-2}\binom{t}{2} + \ldots + \\ + \binom{n}{n-k}\binom{t}{k} + \ldots + \binom{n}{1}\binom{t}{n-1} + \binom{t}{n} \ldots \qquad (1)$$

$$\binom{n-1+t}{n} = \binom{n-1}{n} + \binom{n-1}{n-1}\binom{t}{1} + \binom{n-1}{n-2}\binom{t}{2} + \ldots + \\ + \binom{n-1}{n-k}\binom{t}{k} + \ldots + \binom{n-1}{1}\binom{t}{n-1} + \binom{t}{n} \ldots \qquad (2)$$

....

$$\binom{n-k+t}{n} = \binom{n-k}{n} + \binom{n-k}{n-1}\binom{t}{1} + \binom{n-k}{n}\binom{t}{2} + \ldots + \\ + \binom{n-k}{n-k}\binom{t}{k} + \ldots + \binom{n-k}{1}\binom{t}{n-1} + \binom{t}{n} \ldots \qquad (k+1)$$

....

$$\binom{n-n+t}{n} = \binom{n-n}{n} + \binom{n-n}{n-1}\binom{t}{1}n + \ldots + \\ + \binom{n-n}{n-k}\binom{t}{k} + \ldots + \binom{n-n}{1}\binom{t}{n-1} + \binom{t}{n} \ldots \qquad (n+1)$$

Ha eme egyenlőségeket a feladatban előforduló együtthatókkal megszorozzuk, s tekintetbe vesszük, hogy

$$\binom{s}{r} = 0,$$

ha $r > s$, akkor

$$\binom{n+t}{n} - \binom{n}{1}\binom{n+t-1}{n} + \binom{n}{2}\binom{n+t-2}{n} + \ldots +$$
$$+(-1)^n \binom{n}{n}\binom{t}{n} = \binom{n}{n} + \binom{t}{1}\left[\binom{n}{n-1} - \binom{n}{1}\binom{n-1}{n-1}\right] + \ldots +$$
$$+\binom{t}{k}\left[\binom{n}{n-k} - \binom{n}{1}\binom{n-1}{n-k} + \ldots + (-1)^k \binom{n}{k}\binom{n-k}{n-k}\right] + \ldots$$

vagy rövidebb jelöléssel

$$\binom{n+t}{n} - \binom{n}{1}\binom{n+t-1}{n} + \ldots +$$
$$(-1)^n \binom{n}{n}\binom{t}{n} = \binom{n}{n} + C_1\binom{t}{1} + C_2\binom{t}{2} + \ldots +$$
$$+C_k\binom{t}{k} + \ldots + C_n\binom{t}{n}.$$

Könnyen kimutatható már most, hogy

$$C_k = 0,$$

ha k helyébe $1,\ 2,\ \ldots,\ n$-et teszünk. Ugyanis

$$C_k = \binom{n}{n-k} - \binom{n}{1}\binom{n-1}{n-k} + \ldots + (-1)^k \binom{n}{k}\binom{n-k}{n-k} =$$
$$= \frac{n!}{(n-k)!k!} - \frac{n(n-1)!}{1!(n-k)!(k-1)!} + \frac{n(n-1)(n-2)!}{2!(n-k)!(k-2)!} +$$
$$+ \ldots + (-1)^k \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{(n-k)!}{(n-k)!}.$$

Ámde

$$n(n-1)\ldots(n-k+1)(n-k)! =$$
$$= n(n-1)\ldots(n-k+1)(n-k)\ldots 3\cdot 2\cdot 1 = n!$$

tehát

$$C_k = \frac{n!}{(n-k)!k!}\left[\frac{k!}{k!} - \frac{k!}{(k-1)!1!} + \ldots + (-1)^k \frac{k!}{k!}\right] =$$
$$= \frac{n!}{(n-k)!k!}\left[\binom{k}{0} - \binom{k}{1} + \binom{k}{2} + \ldots + (-1)^k \binom{k}{k}\right].$$

Csakhogy

$$\binom{k}{0} - \binom{k}{1} + \binom{k}{2} - \binom{k}{3} + \ldots + (-1)^k \binom{k}{k} = (1-1)^k = 0,$$

és így

$$C_k = \binom{n}{k}(1-1)^k = 0.$$

Ennéfogva

$$\binom{n+t}{n} - \binom{n}{1}\binom{n+t-1}{n} + \binom{n}{2}\binom{n+t-2}{n} + \ldots +$$
$$-1^n \binom{n}{n}\binom{t}{n} = \binom{n}{n} + \sum_{k=1}^{k=n} C_k \binom{t}{k} = \binom{n}{n} = 1,$$

ha csak n positív egész szám.

(Antal Márkus, bölcsészethallgató, Budapest.)