Határozzuk meg a függvény értékét, ha $x=\pm\infty$. Számlálót s nevezőt x^2-tel osztva:

$$y=\frac{1-\frac{4}{x^2}}{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}$$

Látjuk, hogy $y=1$, ha $x=\pm\infty$.

Keressük x-nek ama értékeit, melyek mellett $y=0$; a függvény akkor 0, ha a számláló 0;

$$x^2-4=0$$

egyenletnek gyökei: $x_1=2,\ x_2=-2$.

A függvény végtelen nagy, ha a nevező 0;

$$x^2+2x-3=0$$

egyenletnek gyökei: $x_1=1,\ x_2=-3$.

Hogy a függvény maximumát meghatározhassuk, kifejezzük x-et y által. A nevezőt eltávolítva s rendezve:

$$x^2(y-1)+2yx-3y+4=0,$$

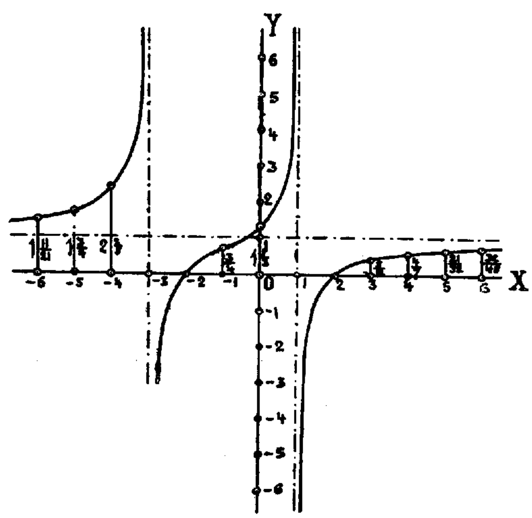
miből

$$x=\frac{-y\pm\sqrt{4y^2-7y+4}}{y-1},$$

vagy

$$x=\frac{-y\pm\sqrt{(2y-\frac{7}{4})^2+\frac{15}{16}}}{y-1}.$$

Látjuk, hogy x, y-nak minden értéke mellett valós, tehát y változhatik $-\infty$-től $+\infty$-ig.



Hogy a függvényt megrajzolhassuk, még néhány értékét határozzuk meg; így ha x helyébe $-6,\ -5,\ -4,\ -1,\ 0,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$-ot teszünk, akkor y-nak értékei: $1\frac{11}{21},\ 1\frac{3}{4},\ 2\frac{2}{5},\ \frac{3}{4},\ 1\frac{1}{3},\ \frac{5}{12},\ \frac{4}{7},\ \frac{21}{32},\ \frac{32}{45}$.

A változóknak egymáshoz tartozó értékei tehát a következők:

x	$-\infty$	…	-6,	-5,	-4,	$-3\frac{1}{2}$,	-3,	$-2\frac{1}{2}$,	-2,	-1,	0,	$\frac{1}{2}$	1,	$1\frac{1}{2}$,
y	1,		$1\frac{11}{21}$,	$1\frac{3}{4}$,	$2\frac{2}{3}$,	$3\frac{2}{3}$,	$\pm\infty$,	$-1\frac{2}{7}$,	0,	$\frac{3}{4}$,	$1\frac{1}{3}$,	$2\frac{1}{7}$,	$\pm\infty$,	$-\frac{7}{9}$

2,	3,	4,	5,	6,	… $\pm\infty$
0,	$\frac{5}{12}$,	$\frac{4}{7}$,	$\frac{21}{32}$,	$\frac{32}{45}$	1

E táblázat mutatja, hogy a függvény értéke 1, ha $x=-\infty$; tehát az $y=1$ egyenes asymptotája a görbének; ha x, -3-ig nő, y nő ∞-ig; innen átugrik $-\infty$-be; az $x=-3$ egyenes asymptotája a görbének. Ha x tovább nő 1-ig, y nő ∞-ig; ezután ismét $-\infty$-be ugrik át; az $x=1$ egyenes asymptotája a görbének; ezután pedig x-nek növekedésével y nő 1-ig, úgy, hogy $y=1$ egyenes asymptotája a görbének.

(Filkorn Jenő, Nyitra.)

A feladatot megoldották: Freibauer E., Goldziher K., Kármán T., Kerekes T., Krausz B., Krisztián Gy., Lukhaub Gy., Pálfy F., Prohászka J., Sasvári G.