Határozzuk meg a függvény értékét, ha $x = \pm\infty$. Számlálót és nevezőt $x^2$-tel osztva:

$$y = \frac{1 - \frac{6}{x} + \frac{8}{x^2}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}$$

Látjuk, hogy $y = 1$, ha $x = \pm\infty$.

Keressük $x$-nek ama értékeit, melyek mellett $y = 0$; a függvény akkor 0, ha a számláló 0:

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

egyenletnek gyökei: $x_1 = 2,\ x_2 = 4$.

A függvény végtelen nagy, ha a nevező 0.

$$x^2 - 2x + 1 = 0.$$

Ezen egyenlet gyökei: $x_1 = x_2 = 1$.

Hogy a függvény maximumát vagy minimumát meghatározhassuk, kifejezzük $x$-et $y$ által. A nevezőt eltávolítva s rendezve:

$$x^2(1-y) - 2x(3-y) + 8 - y = 0,$$

miből

$$x = \frac{3 - y \pm \sqrt{3y+1}}{1-y} \tag{1}$$

$x$ akkor valós, ha

$$3y + 1 \geqq 0,$$

miből

$$y \geqq -\frac{1}{3}$$

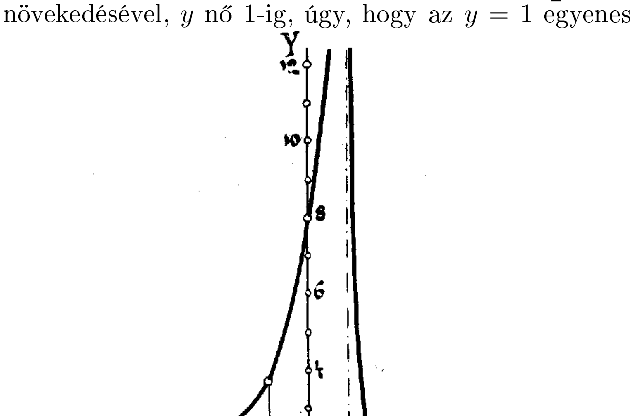
$y$ tehát $-\frac{1}{3}$-tól $+\infty$-ig minden értéket felvehet; a függvénynek tehát minimuma van, mely $-\frac{1}{3}$; $y$-nak ezen értékét (1)-be helyettesítve, kapjuk, hogy $x = \frac{5}{2}$.

Hogy a függvényt megrajzolhassuk, még néhány értékét határozzuk meg; így ha $x$ helyébe $-5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ \frac{1}{2},\ 3, 5,\ 6$-ot teszünk, akkor $y$ értékei: $1\frac{3}{4},\ 1\frac{23}{25},\ 2\frac{3}{16},\ 2\frac{2}{3},\ 3\frac{3}{4},\ 8,\ 21,\ -\frac{1}{4},\ \frac{3}{16},\ \frac{8}{25}$.

A változóknak egymáshoz tartozó értékei tehát a következők:

| x\| | -∞, | ... | -5, | -4, | -3, | -2, | -1, | 0, | $\frac{1}{2}$, | 1, | 2, | $2\frac{1}{2}$, | 3, | 4, | 5, | ... | +∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y\| | 1, | ... | $1\frac{3}{4}$ | $1\frac{23}{25}$ | $2\frac{3}{16}$, | $2\frac{2}{3}$, | $3\frac{3}{4}$, | 8, | 21, | +∞, | 0, | -$\frac{1}{3}$, | -$\frac{1}{4}$, | 0, | $\frac{3}{16}$, | ... | 1 |

E táblázat mutatja, hogy a függvény értéke 1, ha $x = -\infty$; tehát az $y = 1$ egyenes asymptotája a görbének; ha $x$ 1-ig nő, $y$ nő $\infty$-ig; az $x = 1$ egyenes tehát asymptotája a görbének; ha $x$ tovább nő $2\frac{1}{2}$-ig, a függvény fogy $-\frac{1}{3}$-ig, a minimális értékig; ezután pedig $x$-nek a növekedésével, $y$ nő 1-ig, úgy, hogy az $y = 1$ egyenes ismét asymptotája a görbének.




*A feladatot megoldották*: Goldziher K., Kármán T., Freibauer E.