

1°. Az egyenlet gyökei valóságosak, ha

$$16 - 4(2 \cos \alpha - 1) \cdot 2 \cdot (2 \cos \alpha + 1) > 0,$$

vagy

$$3 > 4 \cos^2 \alpha,$$

miből

$$(1) \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \leq \cos \alpha \leq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Mínt hogy $\alpha < 90^\circ$, azért $\cos \alpha > 0$, s így az (1) alatti egyenlőtlenség így írható

$$0 < \cos \alpha \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

vagy, mínt hogy

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^\circ,$$

azért

$$0 < \cos \alpha \leq \cos 30^\circ,$$

miből

$$90^\circ > \alpha \geq 30^\circ.$$

2°. A gyökök szorzata

$$\frac{2(2 \cos \alpha + 1)}{2 \cos \alpha - 1},$$

akkor pozitív, ha a nevező pozitív, tehát ha

$$\cos \alpha > \frac{1}{2},$$

vagyis ha

$$\alpha < 60^\circ,$$

ekkor a gyökök összege

$$\frac{4}{2 \cos \alpha - 1}$$

pozitív s így mindkét gyök pozitív.

Ha ellenben $\alpha > 60^\circ$, a gyökök szorzata negatív, a gyökök tehát ellenkező előjelűek. Vagyis a két gyök pozitív, ha

$$30^\circ \leq \alpha < 60^\circ,$$

a két gyök ellenkező előjelű, ha

$$60^\circ < \alpha < 90^\circ.$$

3°.

$$\begin{aligned} \frac{4 \cos \alpha + 2}{2 \alpha - 1} &= 2 \cdot \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha + \sin \alpha}{2 \sin \alpha \cos \alpha - \sin \alpha} = 2 \frac{\sin 2\alpha + \sin \alpha}{\sin 2\alpha - \sin \alpha} = \\ &= \frac{4 \sin \frac{3}{2} \cos \frac{1}{2} \alpha}{2 \cos \frac{3}{2} \alpha \sin \frac{1}{2} \alpha} = 2 \cdot \operatorname{tg} \frac{3}{2} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \alpha. \end{aligned}$$

(Weisz József.)

A feladatot még megoldották: Krausz B., Krausz J., Krisztián Gy., Lukhaub Gy., Spitzer Ö.