[1] 1°. Minthogy

$$R=\frac{a}{2\sin\alpha}=\frac{a}{4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}},$$

azért

$$4R=\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}=\frac{4a\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{a\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{ss_2s_3}{s}}=r_1.$$

Épp így:

$$r_2=4R\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2},\quad r_3=4R\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}.$$

2°.

$$r_1r_2r_3=\frac{a\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{b\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}\cdot\frac{c\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

$$=abc\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

(Oltay Károly, Budapest, II. ker. áll. főrreálisk.)

Megoldások száma: 10.

[1]A következő jelöléseket alkalmazzuk: $s=\dfrac{a+b+c}{2}$, $s_1=s-a$, $s_2=s-b$, $s_3=s-c$. R a háromszög köré írható kör sugara, O a középpontja, r a háromszögbe írható kör sugara, O' e kör középpontja; r_1, r_2, r_3 a háromszög oldalait kívülről érintő körök sugarai; O_1, O_2, O_3 e körök középpontjai. $OO'=d$, $OO_1=d_1$, $OO_2=d_2$, $OO_3=d_3$. A beírt kör K_1, K_2, K_3 pontokban érinti a háromszög oldalait; az r_1, r_2, r_3 sugarú körök K_1', K_1'', K_1''', K_2', K_2'', K_2''' K_3', K_3'', K_3''' pontokban érintik a háromszög oldalait.