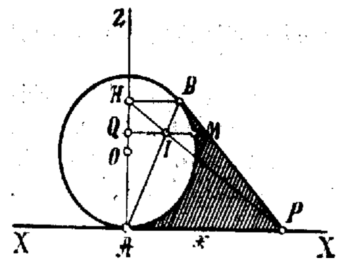

Az ABH és APO háromszögek hasonlóságából következik, hogy

$$\frac{AH}{x} = \frac{HB}{r} = \frac{AB}{OP} = \frac{AB \cdot OP}{\overline{OP^2}}.$$

De

$$AB \cdot OP = 2rx \text{ és } \overline{OP}^2 = r^2 + x^2$$

s így

$$AH = \frac{2rx^2}{r^2+x^2},\ HB = \frac{2r^2x}{r^2+x^2},\ AB = \frac{2rx}{\sqrt{r^2+x^2}}.$$

1° A $PAMB$ idom forgása által keletkezett test köbtartalma (v_1) egyenlő az $APBH$ és $AMBH$ idomok forgása által keletkezett testek köbtartalmainak külömbségével; tehát

$$v_1 = \frac{1}{3}\pi AH(x^2 + x \cdot HB + \overline{HB}^2) - \pi\overline{AH}^2\left(r - \frac{AH}{3}\right).$$

A fentebb talált értékeket helyettesítve s a kijelölt műveleteket elvégezve, kapjuk, hogy

$$v_1 = \frac{2\pi r x^4}{3(r^2+x^2)}.$$

Az APH háromszög forgása által keletkezett test köbtartalma

$$v_2 = \frac{x^2\pi}{3} \cdot AH = \frac{2\pi r x^4}{3(r^2+x^2)}.$$

Látjuk, hogy $v_1 = v_2$.

A PBH háromszög forgása által keletkezett test köbtartalma egyenlő az $APBH$ és APH idomok forgása által keletkezett testek köbtartalmainak külömbségével. A számításokat elvégezve, azt találjuk, hogy e köbtartalom egyenlő az $AMBH$ idom forgása által keletkezett gömbi segmentum köbtartalmával.

2° A feltétel szerint

$$\frac{2\pi r x^4}{3(r^2+x^2)} : \frac{12\pi r^5 x^4 + 4\pi r^3 x^6}{3(r^2+x^2)^3} = \frac{(r^2+x^2)^2}{2r^2(3r^2+x^2)} = n,$$

miből

$$x = \sqrt{r^2(n-1) + \sqrt{r^4(n-1)^2 + r^4(6n-1)}}$$
$$= r\sqrt{n - 1 + \sqrt{n^2+4n}}.$$

Ha $n = \dfrac{4}{3}$, akkor

$$x = r\sqrt{\frac{1}{3} + \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{16}{3}}} = r\sqrt{3}.$$

3° Legyen $HAB\sphericalangle = \dfrac{\alpha}{2}$, I pontból a HB-re bocsátott merőleges talppontja E, s végre az A -ban rajzolt átmérő másik végponja D.

BI a PBH szögnek felezője, tehát a HBP háromszögnek területe

$$T = \frac{BI \cdot HB}{2}\sin\left(R - \frac{\alpha}{2}\right) + \frac{BI \cdot x}{2}\sin\left(R - \frac{\alpha}{2}\right)$$

vagy

$$AH \cdot HB = BI \cdot (HB + x) \cdot \sin\left(R - \frac{\alpha}{2}\right).$$

A megfelelő értékekek helyettesítve:

$$BI = \frac{4r^3x\sqrt{r^2+x^2}}{(r^2+x^2)(3r^2+x^2)}$$

De $BIE\sphericalangle = \dfrac{\alpha}{2}$ s így

$$EI = HQ = BI \cdot \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{4r^3x^2}{(3r^2+x^2)(r^2+x^2)}$$

$HQI\triangle \sim HAP\triangle$, tehát

$$IQ = \frac{x \cdot HQ}{AH} = \frac{2r^2x}{3r^2+x^2}$$

$AQI\triangle \sim AHB\triangle$, tehát

(1) $$AQ = \frac{IQ \cdot AH}{HB} = \frac{2rx^2}{3r^2+x^2}$$

S minthogy

$$DH = \frac{2rx^3}{r^2+x^2},$$

azért

$$MQ = \sqrt{AQ(HQ+HD)} = \frac{2r^2x\sqrt{3}}{3r^2+x^2}$$

s így

$$IQ : MQ = \frac{2r^2x(3r^2+x^2)}{(3r^2+x^2)\cdot 2r^2x\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \text{const.}$$

MQ akkor maximum, ha egyenlő r-rel és így IQ maximuma $\dfrac{r}{\sqrt{3}}$.

(1)-et tekintetbe véve:

$$\frac{2r^2x^2}{3r^2+x^2} = \frac{r}{\sqrt{3}},$$

miből

$$x = r\sqrt{3}.$$

Tehát IQ akkor maximum, ha $x = r\sqrt{3}$.

Minthogy MQ és IQ aránya állandó, azért I pont mértani helye ellipsis, melynek nagy tengelye AD és kis tengelye $\dfrac{2r\sqrt{3}}{3}$.

(Krisztián György.)

A feladatot még megoldották: Frankl J., Groffits G., Lukhaub Gy., Prohászka J.