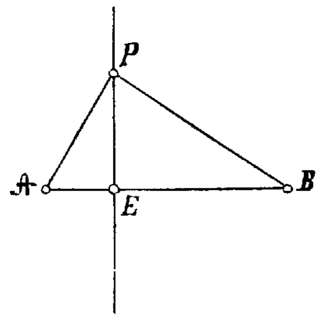
Feladatunk a következő tételek figyelembe vételével könnyen megoldható:

1°. Mindazon pontok mértani helye, melyekre nézve az adott A és B pontoktól való távolságok négyzeteinek külömbsége állandó, oly egyenes, mely AB-re merőleges.



Legyen ugyanis a keresett mértani helynek egyik pontja P, akkor

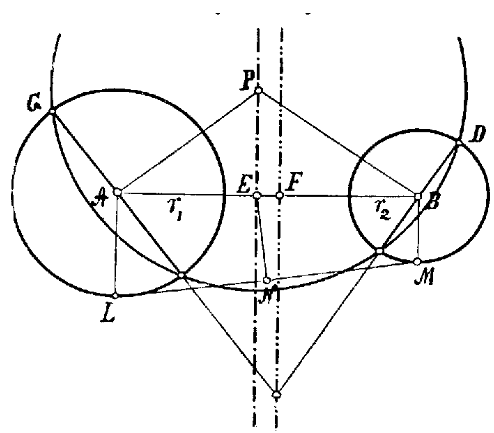
$$\overline{PA}^2 = \overline{PE}^2 + \overline{AE}^2 \text{ és } \overline{PB}^2 = \overline{PE}^2 + \overline{BE}^2$$

s így

$$\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = \overline{AE}^2 - \overline{BE}^2.$$

2°. Ama körök középpontjainak mértani helye, melyek két adott kört két-két átellenes pontban metszenek, oly egyenes, mely az adott körök centrálisára merőlegesen áll.

Legyenek az adott A és B körök sugarai r_1, r_2, a keresett mértani helynek egyik pontja P.



Ekkor

$$\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = \overline{PG}^2 - r_1^2 - \overline{PD}^2 + r_2^2,$$

de

$$PG = PD$$

s így

$$\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = r_2^2 - r_1^2.$$

A keresett mértani hely az első tétel értelmében tehát csakugyan oly egyenes, mely a két kör centrálisára merőleges; egyúttal látjuk, hogy e mértani hely minden pontjára nézve, a megadott körök középpontjaitól való távolságok négyzeteinek külömbsége egyenlő $r_2^2 - r_1^2$.

3°. Ismeretes, hogy két kör (A, B) hatványvonalának (K-M.L.IV.135.lap) minden K pontjára nézve:

$$\overline{KA}^2 - \overline{KB}^2 = r_1^2 - r_2^2$$

s így, ha F a hatványvonal s az AB centrális metszéspontja, akkor

$$\overline{FA}^2 - \overline{FB}^2 = r_1^2 - r_2^2.$$

Ennek alapján úgy határozhatjuk meg a 2)-ben keresett mértani helynek az AB centrálisan fekvő E pontját, hogy AE-t egyenlővé tesszük BF-fel; ekkor ugyanis

$$\overline{AE}^2 - \overline{BE}^2 = \overline{BF}^2 - \overline{AF}^2 = r_2^2 - r_1^2,$$

tehát E csakugyan pontja a keresett mértani helynek.

A keresett mértani hely távolsága az egyik kör középpontjától tehát egyenlő a hatványvonalnak távolságával a másik kör középpontjától.

4°. E-t a következőképpen is megszerkeszthetjük: A és B pontokban (2. ábra) AB-re merőlegeseket emelünk, melyek a köröket L és M pontokban metszik. Az LM-nek középpontjában emelt merőleges a centrálist a keresett E pontban metszi.

Bizonyítás.

$$\overline{AE}^2 - \overline{BE}^2 = \overline{LE}^2 - r_1^2 - \overline{ME}^2 + r_2^2,$$

de

$$LE = ME$$

s így

$$\overline{AE}^2 - \overline{BE}^2 = r_2^2 - r_1^2.$$

5°. A keresett mértani hely minden P pontja oly tulajdonságú, hogy a két körre vonatkoztatott hatványainak külömsége állandó;

$$(\overline{PA}^2 - r_1^2) - (\overline{PB}^2 - r_2^2) = \overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 - r_1^2 + r_2^2 =$$
$$= r_2^2 - r_1^2 - r_1^2 + r_2^2 = 2(r_2^2 - r_1^2).$$

Ez okból e mértani helyet az *äquidifferens hatványok vonalának* nevezzük.

Ezek alapján feladatunkat a következőképpen oldjuk meg: AB-n és BC-n a 4)-ben leírt módon meghatározzuk az E és E' pontokat; az ezen pontokban a centrálisokra emelt merőlegesek a keresett kör középpontjában O-ban metszik egymást. E kör sugarát megkapjuk, ha középpontját, O-t, az egyik adott kör középpontjával pl. A-val összekötjük s OA-ra, A-ban merőlegest emelünk. A keresett kör ezen átmérőnek két végpontján megy át.

A feladatot megoldotta: Krisztián György.