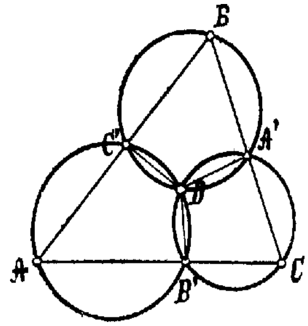
I. Megoldás. Hogy a feladatot megoldhassuk, előre bocsátunk két tételt.

a) A P ponthoz tartozó *Simson-féle egyenes* (K.M.L.VI.4.sz. 68. lap) a P ponttól és a háromszög magasságpontjától egyenlő távolságra van (K.M.L.III. 54. lap).

b) Ha egy háromszögnek három csúcsán át három kört rajzolunk, melyeknek mindegyike a többi két kört a háromszögnek egy-egy oldalán metszi, akkor a három kör egy pontban metszi egymást.

Bizonyítás. Tegyük föl, hogy a B és A csúcsokon átmenő körök egymást C' és D pontokban metszik; bebizonyítjuk, hogy a harmadik kör is átmegy D ponton.

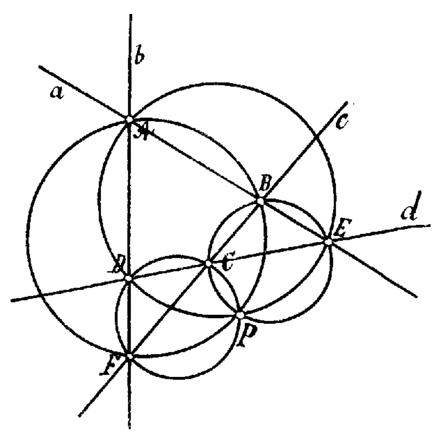


A háromszög 3 szöge és a D pont körül fekvő 3 szög ugyanis együttvéve $6R$; de $BC'DA'$ és $AC'DB'$ húrnégyszögek s így $B\sphericalangle + C'DA'\sphericalangle = 2R$ és $A\sphericalangle + C'DB'\sphericalangle = 2R$, tehát $C\sphericalangle + B'DA'\sphericalangle$ is $2R$, miből következik, hogy $CA'DB'$ is húrnégyszög s ennélfogva a C-n átmenő kör D ponton is átmegy.

E tételből következik, hogy a megadott egyenesek által alkotott háromszögek köré írható körök egy pontban (P) metszik egymást. Az ABF háromszög csúcsain átmenő ADE, BCE és DCF körök az előbbeni tétel értelmében egy P pontban metszik egymást, de a BCE háromszög csúcsain átmenő ABF, BCE és FCD körök is P-ben metszik egymást, tehát P csakugyan közös pontja mind a négy körnek.

Ezek alapján a feladat a következőképpen oldható meg: a megadott egyenesek által alkotott háromszögek köré köröket rajzolunk, melyek a keresett P pontban metszik egymást.

Bizonyítás. A P pontból a CBE háromszög oldalaira bocsátott merőlegesek talppontjai egy egyenesen, a Simson-féle egyenesen feküszenk; épp így az FDC háromszög oldalaira bocsátott merőlegesek talppontjai is egy Simson-féle egyenesen vannak; de minthogy e két egyenesnek két közös pontja van, azért e két egyenes egybeesik s így a négy talppont a négy háromszögnek közös Simson-féle egyenesén fekszik.



Minthogy a Simson-féle egyenes a P ponttól és a háromszög magasságpontjaitól egyenlő távolságban van, következik, hogy a háromszögek magassságpontjai csakugyan egy egyenesen vannak, mely egyenes a 4 háromszögnek közös Simson-féle egyenesével párhuzamos.

(Sasvári Géza.)

II. Megoldás. Azon pontok mértani helye, melyekből valamely háromszög oldalaira bocsátott merőlegesek talppontjai egy s egyenesbe esnek, a háromszög köré írt kör és az s vonalak a háromszög Simson-féle egyenesei. Négy egyenes: a, b, c, d összesen 4 háromszöget alkot, a keresett P pontnak tehát 4 kör kerületén kell feküdnie, a miből egyszersmind azon tétel is következik, hogy 4 egyenes által alkotott háromszögek köré írt körök egymást egy P pontban metszik. Ez a pont felel meg a feladatnak.

Legyenek a háromszögek magasságpontjai M_1, M_2, M_3, M_4. A PM távolságokat s, mint Simson-féle egyenes felezi, ennélfogva M_1, M_2, M_3, M_4 egy s-sel párhuzamos m egyenesen feküsznek és $Pm = 2Ps$.

Jegyzet. Ismeretes tétel, hogy a parabola gyújtópontjából az érintőkre bocsáott merőlegesek talppontjai a csúcsérintőben feküsznek. Ha tehát a, b, c, d egy parabola érintői, akkor P a parabola gyújtópontja, s egyenes pedig a csúcs tangense. Minthogy $Pm - 2Ps$, m a parabola directrixe. A feladat tehát megadja a négy érintő által adott parabola focusának, csúcstangensének és directrixének szerkesztési módját.

A feladatból folyik még a következő tétel:

A parabola bármely 3 érintője által alkotott háromszög magasságpontja a directrixen fekszik.

Hogy a feladat 4-nél több egyenesre is megoldható legyen, szükséges és elegendő feltétel, hogy ezen egyenesek egy parabola érintői legyenek.

(Riesz Frigyes, Zürich.)

A feladatot még megoldották: Friedmann Bernát, b.h., Kornis Ö., Krisztián Gy.