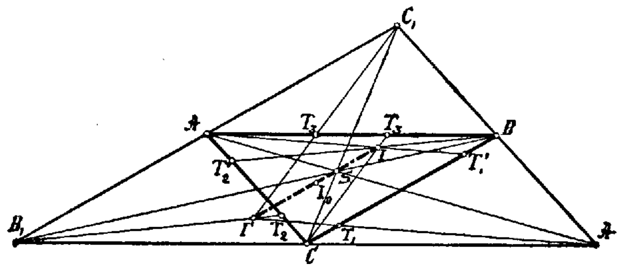
Hogy az $A_1B_1C_1$ háromszögben I'-t, mely helyzetére nézve az ABC háromszögben fekvő I-nek felel meg, megtaláljuk, rajzoljunk A_1-ből AT_1'-tel és B_1-ből BT_2'-tel párhuzamosokat; e párhuzamosak metszéspontja I', mert az $A_1B_1C_1$ háromszög megfelelő oldalai is párhuzamosak az ABC háromszög oldalaival. A két háromszögnek közös súlypontja van, mely AA_1 és BB_1 metszési pontja.



Az ABI és A_1B_1I' háromszögek hasonlók, mert megfelelő oldalaik párhuzamosak; ennélfogva:

$$A_1I' : AI = A_1B_1 : AB = 2 : 1$$

$A_1I' \parallel AI$, arányuk $2 : 1$; $A_1S \parallel AS$, arányuk ugyanacsak $2 : 1$, miből következik, hogy az ASI és A_1SI' háromszögek hasonlók. E két háromszög hasonlóságából következik a tétel mindkét részének helyessége. Ugyanis:

1°. $ASI\sphericalangle = ASI'\sphericalangle$, a mi annyit mond, hogy I, S, és I' pontok egy egyenesbe esnek. Egész hasonlóan bizonyíthatjuk be, hogy $I^{(k)}$, $I^{(k+1)}$ és S pontok is egyenesen vannak. Így tehát egymásután kimutathatjuk, hogy $(I,\ S,\ I')$, $(I',\ S,\ I'')$, $\ldots$, $(I^{(k)},\ S,\ I^{(k+1)}$, $\ldots$, $(I^{(n-11)},\ S,\ I^{(n)}$ egy egyenesen vannak, a mivel a tétel első részét bebizonyítottuk.

2°. Ugyancsak a két háromszög hasonlóságából következik, hogy

$$I'S = 2IS;$$

hasonlóképpen kimutathatjuk, hogy

$$I''S = 2I'S = 2^2IS;\ \ldots\ I^{(k+1)}S = 2(I^{(k)}S = 2^{(k+1)}IS;\ \ldots\ I^{(n)}S = 2^n = 2^nIS.$$

Minthogy pedig (K.M.L. 294. feladat IV. évfolyam 167. lap)

$$IS = 2I_0S,$$

azért

$$I^{(n)}S = 2^{n+1}I_0S.$$

(Friedmann Bernát.)

A feladatot még megoldották: Devecis Mihály, Kántor Nándor (b. h.), Riesz Frigyes (műegyet. h.).