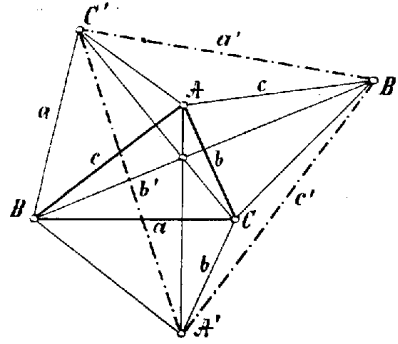


(1) Kössük össze  $C'$ -t és  $B'$ -t  $A$ -val,  $A'$ -t és  $C'$ -t  $B$ -vel,  $A'$ -t és  $B'$ -t  $C$ -vel.



Mint ahogy

$$ABC \trianglecong BAC' \triangle \text{ és } BAC \trianglecong ACB' \triangle,$$

azért

$$AC' = b, AB' = c,$$

$$BAC' \sphericalangle = CAB' \sphericalangle = \alpha$$

s így

$$C'AB' \sphericalangle = 360^\circ - 3\alpha$$

$B'C'A$  háromszögből:

$$a'^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos 3\alpha$$

$ABC$  háromszögből

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

s így

$$a'^2 - a^2 = 2bc(\cos \alpha - \cos 3\alpha).$$

De

$$\begin{aligned} \cos 3\alpha &= \cos(2\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 2\alpha \sin \alpha = \\ &= \cos^3 \alpha - 3 \sin^2 \alpha \cos \alpha \end{aligned}$$

s így

$$\begin{aligned} a'^2 - a^2 &= 2bc(\cos \alpha - \cos^3 \alpha + 3 \sin^2 \alpha \cos \alpha) \\ a'^2 - a^2 &= 2bc[3 \sin^2 \alpha \cos \alpha + \cos \alpha(1 - \cos^2 \alpha)] \\ a'^2 - a^2 &= 2bc(3 \sin^2 \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin^2 \alpha) \\ a'^2 - a^2 &= 8bc \sin^2 \alpha \cos \alpha. \end{aligned}$$

De az  $ABC$  háromszög kettős területe:

$$2t = bc \sin \alpha$$

s így

$$a'^2 - a^2 = 8t \sin 2\alpha$$

épp így

$$b'^2 - b^2 = 8t \sin 2\beta$$

$$c'^2 - c^2 = 8t \sin 2\gamma,$$

mely egyenletek összeadásából ered:

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 - (a^2 + b^2 + c^2) = 8t(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma).$$

De

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$$

s így végre:

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 - (a^2 + b^2 + c^2) = 32t(\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma).$$

(2)

$$t' = 4t - \frac{bc}{2} \sin 3\alpha - \frac{ac}{2} \sin 3\beta - \frac{ab}{2} \sin 3\gamma,$$

de

$$\frac{bc}{2} = \frac{t}{\sin \alpha}, \quad \frac{ac}{2} = \frac{t}{\sin \beta}, \quad \frac{ab}{2} = \frac{t}{\sin \gamma}$$

s így

$$t' = 4t - \frac{t \sin 3\alpha}{\sin \alpha} = \frac{t \sin 3\beta}{\sin \beta} - \frac{t \sin 3\gamma}{\sin \gamma}.$$
$$\frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin(2\alpha + \alpha)}{\sin \alpha} = \frac{\sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha}{\sin \alpha} =$$
$$= 2 \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 4 \cos^2 \alpha - 1$$

épp így

$$\frac{\sin 3\beta}{\sin \beta} = 4 \cos^2 \beta - 1 \quad \text{és} \quad \frac{\sin 3\gamma}{\sin \gamma} = 4 \cos^2 \gamma - 1.$$

Ezen kifejezéseket helyettesítve:

$$t' = 4t + 3t - 4t(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma)$$

De (K.M.L.V.53.lap)

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 - \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$$

s így

$$t' = 3t + 8t \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$$

vagy

$$t' = t[3 + 8 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma].$$

(Szabó István.)

*A feladatot még megoldották:* Barna D., Bella I., Fekete J., Freibauer E., Goldziher K., Groffits G., Hrivnák A., Kertész L., Manheim E., Sasvári G.