I. Megoldás.

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}},\ \sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}},$$
$$\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$$

s így

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{abc};$$

számlálót és nevezőt s-sel szorozva:

$$\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}=\frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{abc\cdot s}=\frac{T^2}{abc\cdot s}.$$

De

$$R=\frac{abc}{4T}\text{ és }r=\frac{T}{s}$$

s így

$$\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}=\frac{r}{4R},$$

ahol r a háromszögbe, R a háromszög köré ír kör sugara; mivel pedig $r<R$, azért

$$\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}<\frac{1}{4}.$$

(Beck Ferencz, Fiume.)

II. Megoldás.

$$\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}=\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\cos\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)=$$
$$=\sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}-\sin^2\frac{A}{2}\cdot\sin^2\frac{B}{2}=$$
$$=\frac{1}{4}\cdot\sin A\cdot\sin B-\sin^2\frac{A}{2}\cdot\sin^2\frac{B}{2};$$

minthogy $\sin A$ és $\sin B$ legnagyobb értéke $=1$, azért

$$\frac{1}{4}\cdot\sin A\cdot\sin B<\frac{1}{4},$$

tehát minthogy $\sin^2\frac{A}{2}\cdot\sin^2\frac{B}{2}$ positív: annál is inkább áll, hogy:

$$\frac{1}{4}\cdot\sin A\cdot\sin B-\sin^2\frac{A}{2}\cdot\sin^2\frac{B}{2}=\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}<\frac{1}{4}.$$

(Kertész Lajos.)

III. Megoldás.

$$=\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}=\frac{\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C}{8\cdot\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}}=$$
$$=\frac{\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C}{2\cdot(\sin A+\sin B+\sin C)}=\frac{1}{8}\cdot\frac{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}{\sin A+\sin B+\sin C)}.$$

De

$$\sin 2A<2\sin A,\ \sin 2B<2\sin B,\ \sin 2C<2\sin C$$

s így

$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C<2(\sin A+\sin B+\sin C),$$

miből

$$\frac{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}{\sin A + \sin B + \sin C} < 2$$

ezen egyenlőtlenség mindkét oldalá-t 8-czal osztva:

$$\frac{1}{8} \cdot \frac{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}{\sin A + \sin B + \sin C} < \frac{1}{4}.$$

(Freibauer Ede, Budapest.)

A feladatot még megoldották: Bobál S., Dénes A., Devecis M., Erdős A., Fekete J., Goldziher K., Kallos M., Klein A., Kornis Ö., Lukhalub Gy., Posgay B., Probst E., Schiffer H., Szabó K., Weisz A., Weisz J.