1. Legyen először a P pont az ABC háromszög síkjában. Bizonyításainkban a következő egyszerű segédtételt fogjuk felhasználni:

Ha valamely XYZ háromszög X csúcsából a szemben fekvő YZ oldalhoz XX_1 szelőt húzunk, akkor:

$$\frac{X_1Y}{X_1Z} = \frac{XY \cdot \sin \widehat{YXX_1}}{XZ \cdot \sin \widehat{ZXX_1}}$$

Ennek kimutatására az XYX_1 és XZX_1 háromszögekre a sinus tételt a következőképpen alkalmazzuk:

$$\frac{X_1Y}{X_1X} = \frac{\sin \widehat{YXX_1}}{\sin \widehat{XYX_1}}$$

és

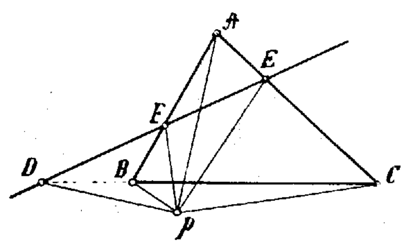
$$\frac{X_1Z}{X_1X} = \frac{\sin \widehat{ZXX_1}}{\sin \widehat{XZX_1}}.$$

E két egyenlet hányadosát képezve, és tekintetbe véve azt, hogy

$$\frac{\sin \widehat{XZX_1}}{\sin \widehat{XYX_1}} = \frac{XY}{XZ}$$

nyerjük segédtételünket.

Alkalmazzuk már most a lehozott tételt a PAB, PBC és PCA háromszögekre.



Akkor

$$\frac{FA}{FB} = \frac{PA \cdot \sin \widehat{APF}}{PB \cdot \sin \widehat{BPF}}$$

$$\frac{DB}{DC} = \frac{PB \cdot \sin \widehat{BPD}}{PC \cdot \sin \widehat{CPD}}$$

és

$$\frac{EC}{EA} = \frac{PC \cdot \sin \widehat{CPE}}{PA \cdot \sin \widehat{APE}}$$

E három egyenletet összeszorozva és tekintetbe véve azt, hogy:

$$\widehat{APF} = 180^\circ - \widehat{CPD}$$

$$\widehat{BPD} = \widehat{APE}$$

$$\widehat{CPE} = \widehat{BPF}$$

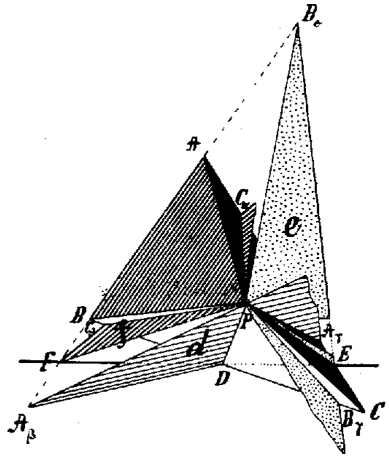
nyerjük:

$$\frac{FA}{FB} \cdot \frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} = 1$$

mi a Menelaos-féle tétel értelmében világosan azt bizonyítja, hogy a D, E és F egy egyenesben feküsznek.

2. Vegyük már most a P pontot az ABC háromszög síkján kívül.

Ez esetben a PA, PB, PC egyenesek oly tetraëder oldaléleit képezik, melynek alapja az ABC háromszög és csúcsa a P pont.



A PD, PE, PF egyenesek helyett most olyan d, e, f síkokat kell vennünk, melyek valamennyien a P csúcson mennek keresztül és merőlegesek megfelelően a PA, PB, PC oldalélekre. A d sík a BC oldalon a D pontot, az e sík a CA oldalon az E pontot, és végre az f sík az AB oldalon az F pontot határozza meg.

Messe a d sík az AC, AB oldalakat A_γ, A_β pontokban, az e sík az BA, BC oldalakat B_α, B_γ pontokban, és végre az f sík a CA, CB oldalalakat C_α, C_β pontokban. Akkor:

$$PA_\gamma \perp PA \quad \text{és} \quad PA_\beta \perp PA$$
$$PB_\alpha \perp PB \quad \text{és} \quad PB_\gamma \perp PB$$
$$PC_\beta \perp PC \quad \text{és} \quad PC_\alpha \perp PC$$

és valamennyi a d, c, f síkoknak a PA, PB, PC egyenesekre való merőlegességéből következik.

Az A_β, D és A_γ pontok egy egyenesben feküsznek és pedig a d síknak az ABC síkkal való metszésvonalában, és így a Menelaos-féle tétel értelmében:

$$\frac{DB}{DC} \cdot \frac{A_\beta C}{A_\alpha A} \cdot \frac{A_\gamma A}{A_\gamma B} = 1.$$

De ha segédtételünket a PCA és PAB háromszögek PA_β illetőleg PA_γ szelőjére alkalmazzuk, akkor:

$$\frac{A_\beta C}{A_\beta A} = \frac{PC \cdot \sin \widehat{CPA_\beta}}{PA \cdot \sin 90^\circ}$$

és

$$\frac{A_\gamma A}{A_\gamma B} = \frac{PA \cdot \sin 90^\circ}{PB \cdot \sin \widehat{A_\gamma PB}}$$

és így

$$\frac{DB}{DC} \cdot \frac{PC \cdot \sin \widehat{CPA_\beta}}{PB \cdot \sin \widehat{A_\gamma PB}} = 1.$$

Hasonlóképpen:

$$\frac{EC}{EA} \cdot \frac{PA \cdot \sin \widehat{APB_\gamma}}{PC \cdot \sin \widehat{B_\alpha PC}} = 1$$

és

$$\frac{FA}{FB} \cdot \frac{PB \cdot \sin \widehat{BPC_\alpha}}{PA \cdot \sin \widehat{C_\beta PA}} = 1.$$

E három egyenlőséget összeszorozva és tekintetbe véve, hogy:

$$\widehat{CPA_\beta} = \widehat{C_\beta PA} \qquad \widehat{APB_\gamma} = \widehat{A_\gamma PB} \qquad \widehat{BPC_\alpha} = \widehat{B_\alpha PC}$$

nyerjük:

$$\frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{FA}{FB} = 1$$

mi a Menelaos-féle tétel értelmében a D, E, F pontoknak egy egyenesben való fekvését bizonyítja.

Megjegyzések. Ha a P pont az ABC háromszög köré írható kör kerületén bárhol van, akkor a DEF egyenes keresztül megy e kör középpontján.

A tétel folyománya a következő tétel:

Legyen adva egy AA_1, BB_1 és CC_1 magasságokkal bíró ABC háromszög és síkjában egy P pont akárhol; bebizonyítható, hogy PAA_1, PBB_1 és PCC_1 körök középpontjai egy egyenesben feküsznek. (Vagyis a P ponton kívül még egyszer egy pontban találkoznak.)

(Weisz Lipót.)

A feladatot még megoldották: Friedmann B., Grosz A., Kántor N., Kornis Ö., Prakatur T., Riesz Fr., Szabó I., Szabó K.