Legyen a félgömb térfogata V_1, a hexaëderé V_2, a gömbé V_3, a tetraëderé V_4. Legyen továbbá V a félgömb középpontja, mely egyúttal a tetraëder alaplapjának is középpontja; a tetraëdernek a félgömb felületén fekvő egyik csúcsa A, ez utóbbinak vetülete a tetraëder alaplapjára B.

Az ABO derékszögű háromszögből – ha a tetraëder élét a-val, a gömb sugarát r-rel jelöljük – kapjuk, hogy

$$r^2 = a^2 + \frac{a^2}{2} = \frac{3}{2}a^2,$$

miből,

$$a = \frac{r}{3}\sqrt{6}$$

s így a tetraëder köbtartalma

$$V_2 = \frac{2r^3}{9}\sqrt{6}. \tag{1}$$

a tetraëderbe írt gömb sugara:

$$r_1 = \frac{a}{2} = \frac{r}{6}\sqrt{6}$$

s így

$$V_3 = \frac{4\pi r_1^3}{3} = \frac{\pi r^3}{27}\sqrt{6}. \tag{2}$$

A gömbbe írható tetraëder éle:

$$b = \frac{2r_1}{3}\sqrt{6} = \frac{2}{3}r$$

a tetraëder köbtartalma:

$$V_4 = \frac{b^3}{12}\sqrt{2} = \frac{2r^3}{81}\sqrt{2}. \tag{3}$$

Minthogy az eredeti félgömb köbtartalma

$$V_1 = \frac{2\pi r^3}{3} \tag{4}$$

azért (4), (1), (2) és (3) alapján:

$$V_1 : V_2 : V_3 : V_4 = \frac{2\pi r^3}{3} : \frac{2r^3}{9}\sqrt{6} : \frac{\pi r^3}{27}\sqrt{6} : \frac{2r^3}{81}\sqrt{2}$$

vagy az utótagokat $\frac{81\sqrt{2}}{2r^3}$-val szorozva:

$$V_1 : V_2 : V_3 : V_4 = 27\pi\sqrt{2} : 18\sqrt{3} : 3\pi\sqrt{3} : 2.$$

(Fekete Jenő.)

Megoldások száma: 25.