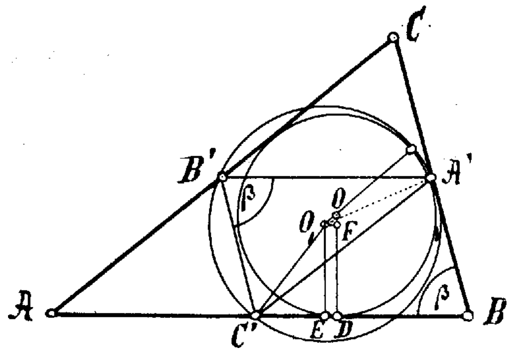
1°. Tudjuk, hogy a Feuerbach-féle kör [1] keresztül megy az A', B', és C' oldalfelező pontokon.



Legyen O_1 a Feuerbach-féle kör középpontja, $O_1C' = \dfrac{R}{2}$ a sugara, hol R az ABC háromszög köré írt kör sugara; legyen továbbá a háromszöget belül érintő kör középpontja O, sugara $OD = r$; a háromszög oldalai a, b, c; szögei α, β, γ; a háromszög félkerülete s.

$$O_1C'B'\sphericalangle = O_1C'A'\sphericalangle + A'C'B\sphericalangle$$

$C'O_1A'\sphericalangle$ mint középponti szög 2β, tehát $O_1C'A'\sphericalangle = 90^\circ - \beta$.

$A'C'B'\sphericalangle = \alpha$, mert $A'D' \parallel AC$ s így

$$O_1C'B'\sphericalangle = 90^\circ - (\beta - \alpha).$$

Az OO_1F derékszögű háromszögből az OO_1 centrális négyzete:

(1) $$\overline{OO_1}^2 = \overline{OF}^2 + \overline{O_1F}^2.$$

De

$$OF = OD - O_1E = r - \frac{R}{2}\cos(\beta - \alpha)$$

és

$$O_1F = ED = C'B - BD - C'E$$

$$\frac{c}{2} - (s - b) - \frac{R}{2}\sin(\beta - \alpha) = \frac{b-a}{2} - \frac{R}{2}\sin(\beta - \alpha)$$

$$= R(\sin\beta - \sin\alpha) - \frac{R}{2}\sin(\beta - \alpha)$$

s így

$$\overline{OO_1}^2 = \left[r - \frac{R}{2}\cos(\beta - \alpha)\right]^2 + \left[R(\sin\beta - \sin\alpha) - \frac{R}{2}\sin(\beta - \alpha)\right]^2$$

$$\overline{OO_1}^2 = r^2\frac{R^2}{4} - Rr\cos(\beta - \alpha) + R^2(\sin\beta - \sin\alpha)\times$$
$$\times[(\sin\beta - \sin\alpha) - \sin(\beta - \alpha)]$$

de

$$\cos(\beta - \alpha) = 1 - 2\sin^2\frac{\beta - \alpha}{2}$$

s így

$$\overline{OO_1}^2 = r^2 + \frac{R^2}{4} - Rr + 2Rr\sin^2\frac{\beta - \alpha}{2} + 4R^2\cos\frac{\beta - \alpha}{2} + 4R^2\cos\frac{\beta + \alpha}{2}\sin^2\frac{\beta - \alpha}{2}\times$$

$$\times\left(\cos\frac{\beta + \alpha}{2} - \cos\frac{\beta - \alpha}{2}\right)$$

$$= \left(r - \frac{R}{2}\right)^2 + 2Rr\sin^2\frac{\beta - \alpha}{2} - 8R^2\sin^2\frac{\beta - \alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}.$$

Minthogy pedig

$$4R\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = r$$

[1] Azon kört, mely a háromszög magasságainak talppontjain, az oldalak középpontjain és a magasságoknak a csúcsok felé eső részeinek középpontjain megy át, Feuerbach-féle körnek nevezzük (K.M.L, A talpponti háromszög; IV. 44. lap.).

azért

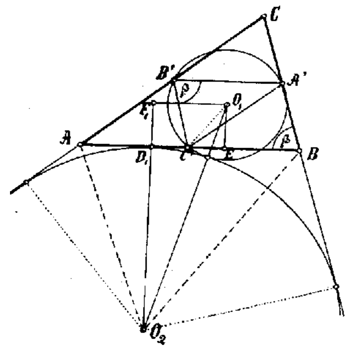
$$\overline{OO_1}^2 = \left(r - \frac{R}{2}\right)^2 + 2Rr\sin^2\frac{\beta-\alpha}{2} - 2Rr\sin^2\frac{\beta-\alpha}{2}$$

vagyis

$$OO_1 = \frac{R}{2} - r.$$

Minthogy tehát a centrális egyenlő a két kör sugarának különbségével, azért a két kör egymást csakugyan belülről érinti.

2°. Legyen a háromszöget kívülről érintő körök egyikének középpontja O_2, sugara $O_2D_1 = r_1$.



Az $O_1F_1O_2$ derékszögű háromszögből az O_1O_2 centralis négyzete:

$$\overline{O_1O_2}^2 = \overline{O_2F_1}^2 + \overline{O_1F_1}^2. \tag{2}$$

De

$$O_2F_1 = O_2D_1 + O_1E = r_1 + \frac{R}{2}\cos(\beta-\alpha)$$

és

$$O_1F_1 = ED_1 = C'A - AD_1 + C'E.$$

Minthogy pedig

$$AD_1 = BD = s - b,$$

azért

$$\begin{aligned} O_1F_1 &= \frac{c}{2} - (s-b) + \frac{R}{2}\sin(\beta-\alpha) \\ &= \frac{b-a}{2} + \frac{R}{2}\sin(\beta-\alpha) \\ &= R(\sin\beta - \sin\alpha) + \frac{R}{2}\sin(\beta-\alpha) \end{aligned}$$

s így

$$\begin{aligned} \overline{O_1O_2}^2 &= \left[r_1 + \frac{R}{2}\cos(\beta-\alpha)\right]^2 + \left[R(\sin\beta-\sin\alpha) - \frac{R}{2}\sin(\beta-\alpha)\right]^2 \\ &= r_1^2 + \frac{R^2}{4} + Rr_1\cos(\beta-\alpha) + R^2(\sin\beta-\sin\alpha)\times \\ &\quad \times[(\sin\beta-\sin\alpha)+\sin(\beta-\alpha)] \\ &= r_1^2 + \frac{R^2}{4} + Rr_1 - 2Rr_1\sin^2\frac{\beta-\alpha}{2} + 4R^2\cos\frac{\beta+\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta-\alpha}{2}\times \\ &\quad \times\left(\cos\frac{\beta+\alpha}{2} - \cos\frac{\beta-\alpha}{2}\right) \\ &= \left(r_1 + \frac{R}{2}\right)^2 - 2Rr_1\sin^2\frac{\beta-\alpha}{2} + 8R^2\sin^2\frac{\beta-\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\times \\ &\quad \times\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}. \end{aligned}$$

Minthogy pedig

$$4R\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=r_1$$

azért

$$\overline{O_1O_2}^2=\left(r_1+\frac{R}{2}\right)^2-2Rr_1\sin^2\frac{\beta-\alpha}{2}+2Rr_1\sin^2\frac{\beta-\alpha}{2}$$

vagyis

$$O_1O_2=r_1+\frac{R}{2}.$$

Minthogy tehát a centrális a két kör sugarának összegével egyenlő, a két kör egymást kívülről érinti. Ugyanezt hasonlóképp kimutathatjuk a másik két kívülről érintő körről is.

(Friedmann Bernát.)

A feladatot még megoldották: Riesz Frigyes műegyetemi hallgató és Kornis Ödön.