Első megoldás. 1.° Ismeretes, hogy a háromszög szögfelezői egy pontban metszik egymást, mely pont a háromszögbe írható kör középpontja, O. Ha e pontból a háromszög oldalaira merőlegeseket bocsátunk, kapjuk az A_1, B_1 és C_1 pontokat.

AOB_1 és AOC_1 háromszögek egybevágók, mert AO oldal közös, $OAB_1\sphericalangle = OAC_1\sphericalangle = \frac{1}{2}CAB\sphericalangle$ és $AB_1O\sphericalangle = AC_1O\sphericalangle = 90°$. Ennélfogva $AB_1 = AC_1$; épp így kimutatható, hogy $BC_1 = BA_1$ és $CA_1 = CB_1$. Ha e három egyenletet egymással megszorozzuk, kapjuk, hogy:

$$AB_1 \cdot BC_1 \cdot CA_1 = AC_1 \cdot BA_1 \cdot CB_1,$$

mely egyenlet a Ceva-féle tétel (K.M.L.II. évf., 94. l.) szerint kriteriuma annak, hogy az AA_1, BB_1 és CC_1 egyenesek egy M pontban metszik egymást. $AB_1 = AC_1$ és $BA_1 = BC_1$, tehát $AB_1 + BA_1 = AC_1 + BC_1 = c$ s így $CA_1 + CB_1 = 2s - 2c$, vagy $CA_1 = CB_1 = s - c$ és hasonlóképpen $AB_1 = AC_1 = s - a$, $BC_1 = BA_1 = s - b$.

2.° Vonjunk A-n keresztül BB_1 párhuzamost, mely CC_1-et D-ben metszi. $AD \parallel B_1M$ s így:

$$MD : MC = AB_1 : CB_1 \tag{1}$$

AC_1D és BC_1M háromszögek hasonlóságából következik, hogy:

$$MC_1 : MD = BC_1 : BA \tag{2}$$

E két aránylat megfelelő tagjait egymással megszorozva:

$$MC_1 : MC = AB_1 \cdot BC_1 : CB_1 \cdot BA$$

vagy

$$\frac{MC_1}{MC} = \frac{(s-b)(s-a)}{(s-c)c}$$

ha még tekintetbe vesszük, hogy a két távolság ellenkező irányú, úgy hányadosuk negatív s így.

$$\frac{MC_1}{MC} = -\frac{(s-b)(s-a)}{c(s-c)}. \tag{3}$$

Hasonlóképpen kapjuk, hogy

$$\frac{MB_1}{MB} = -\frac{(s-a)(s-c)}{b(s-b)} \tag{4}$$

$$\frac{MA_1}{MA} = -\frac{(s-b)(s-c)}{a(s-a)} \tag{5}$$

A (3), (4) és (5) alatti egyenleteket egymással szorozva, kapjuk, hogy.

$$\frac{MA_1}{MA} \cdot \frac{MB_1}{MB} \cdot \frac{MC_1}{MC} = -\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}$$
$$= -\frac{\frac{t^2}{s}}{abc} = -\frac{\frac{t}{s}}{\frac{abc}{t}} = -\frac{r}{4R}.$$

(Friedmann Bernát.)

Második megoldás. 1.° A Ceva-féle tétel alapján:

$$\frac{C_1A}{C_1B} \cdot \frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} = -\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{(s-a)(s-b)(s-c)} - 1 \tag{1}$$

2.° A BB_1 által metszett AA_1C háromszögre a Menelaos-féle tételt (M.L.IV. évf., 148. l.) alkalmazva:

$$\frac{MA_1}{MA} \cdot \frac{B_1A}{B_1C} \cdot \frac{BC}{BA_1} = 1. \tag{2}$$

Hasonlóképp a CC_1 által metszett BB_1A háromszögből:

$$\frac{MB_1}{MB} \cdot \frac{C_1B}{C_1A} \cdot \frac{CA}{CB_1} = 1 \tag{3}$$

végül az AA_1 által metszett CC_1B háromszögből

$$\frac{MC_1}{MC} \cdot \frac{A_1B}{A_1B} \cdot \frac{AB}{AC_1} = 1. \tag{4}$$

E négy egyenletet egymással megszorozva:

$$\frac{MA_1}{MA} \cdot \frac{MB_1}{MB} \cdot \frac{MC_1}{MC} = -\frac{BA_1}{BC} \cdot \frac{CB_1}{CA} \cdot \frac{AC_1}{AB} = -\frac{(s-b)(s-c)(s-a)}{abc} = -\frac{r}{4R}.$$

(Grosz Andor, bölcsészet hallgató.)

A feladatot még megoldották: Kántor N., Kornis Ö., Riesz F., Spitzer Ö.