

$$\begin{aligned}
1^4 &= 1 \\
2^4 &= (1+1)^4 = 1^4 + 4 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 1 \\
3^4 &= (2+1)^4 = 2^4 + 4 \cdot 2^3 + 6 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 1 \\
4^4 &= (3+1)^4 = 3^4 + 4 \cdot 3^3 + 6 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 + 1 \\
&\dots \\
&\dots \\
(n+1)^4 &= n^4 + 4 \cdot n^3 + 6 \cdot n^2 + 4 \cdot n + 1.
\end{aligned}$$

Adjuk össze az egymás alatt álló tagokat s vonjuk ki mindkét oldalból

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4$$

összeget, úgy

$$\begin{aligned}
(n+1)^4 &= 4(1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) + 6(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) + \\
&+ 4(1 + 2 + 3 + \dots + n) + n + 1,
\end{aligned}$$

miből

$$4(1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 - 6 \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} - 4 \frac{n(n+1)}{2} - n - 1$$

vagy

$$4(1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) = n^4 + 2n^3 + n^2 = n^2(n+1)^2$$

s így

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2}{4}(n+1)^2 = \left[ \frac{n}{2}(n+1) \right]^2 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2.$$

(Pollák Simon, Nyitra.)

*A feladatot még megoldották:* Beck F., Brandt D., Devecis M., Fekete J., Freibauer E., Friedmann B., Goldziher K., Gross N., Kántor N., Kárf J., Kornis Ö., Manheim E., Petrogalli G., Prakatur T., Roth M., Schiffer H., Schwartz E., Spitzer Ö., Szabó I., Szabó K., Weisz J.