I. Megoldás. Legyenek az ABC háromszög oldalai: a, b, c; szögei: α, β, γ. Az ABC' és ACB' háromszögekből a sinus-tétel alapján:

$$BC' = \frac{c\cos\alpha}{\cos\gamma} \text{ és } CB' = \frac{b\cos\alpha}{\cos\beta}$$

s így

$$\begin{aligned} B'C' &= C'B + a + CB' \\ &= a + \frac{b\,\cos\alpha}{\cos\beta} + \frac{c\,\cos\alpha}{\cos\gamma} \\ &= \frac{a\,\cos\beta\cos\gamma + b\,\cos\alpha\cos\gamma + c\,\cos\alpha\cos\beta}{\cos\beta\cos\gamma} \\ &= \frac{a\,\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha(b\,\cos\gamma + c\,\cos\beta)}{\cos\beta\cos\gamma} \\ &= \frac{a\cos\beta\cos\gamma + a\cos\alpha}{\cos\beta\cos\gamma} = \frac{a(\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma)}{\cos\beta\cos\gamma} \\ &= \frac{a(\sin\beta\sin\gamma - \cos\beta\cos\gamma + \cos\beta\cos\gamma)}{\cos\beta\cos\gamma} \\ &= a\tan\beta\tan\gamma. \end{aligned}$$

Legyen továbbá az $AB'C'$ háromszögbe írható kör középpontja O, sugara r. Az $OC'B'$ háromszög területét kétféleképpen kifejezve nyerjük, hogy

$$\frac{1}{2}C'B' \cdot r = \frac{1}{2}C'D \cdot B'D \cdot \sin\frac{B'+C'}{2}$$

$$C'B' \cdot r = \frac{B'C'\sin\frac{B'}{2}}{\sin\frac{B'+C'}{2}} \cdot \frac{B'C'\sin\frac{C'}{2}}{\sin\frac{B'+C'}{2}} \sin\frac{B'+C'}{2}$$

miből

$$r = \frac{B'C'\sin\frac{B'}{2}\sin\frac{C'}{2}}{\sin\frac{B'+C'}{2}}$$

de

$$B' = 90^\circ - \beta,\ C' = 90^\circ - \gamma$$

s így

$$r = \frac{a\,\tan\beta\,\tan\gamma\,\sin\left(45^\circ - \frac{\beta}{2}\right)\,\sin\left(45^\circ - \frac{\gamma}{2}\right)}{\cos\frac{\beta+\gamma}{2}}$$

(Friedmann Bernát.)

II. Megoldás. Vonjuk meg a háromszög AD, BE és CF magasságait, melyek egymást H pontban metszik.

$$AC' \parallel HB \text{ és } AB' \parallel HC$$

azért

$$AC'B'\triangle \sim HBC\triangle$$

s így

$$C'B' : a = AD : HD$$

miből

$$C'B' = a\frac{AD}{HD}$$

de az ADC és HDC derékszögű háromszögekből:

$$AD = CD \cdot \tan\gamma,\ HD = CD \cdot \tan HCD = CD \cdot \cot\beta$$

és így

$$\frac{AD}{HD} = \tan\beta\tan\gamma$$

tehát

$$C'B' = a\tan\beta\tan\gamma.$$

(Weisz Lipót.)

Megoldások száma: 52.