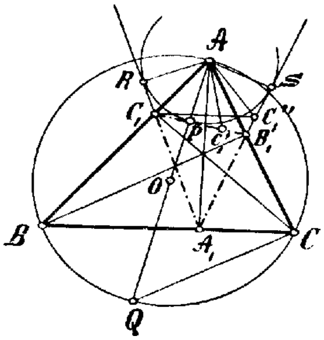
Segédtétel: A háromszög köré írható körnek a csúcsokhoz vont sugarai merőlegesek a talpponti háromszög oldalaira. Húzzuk meg pl. AOQ átmérőt, mely a talpponti háromszög B_1C_1 oldalát P-ben metszi.

$$AQC\angle = ABC\angle = \beta$$

tehát, mivel ACQ derékszög, $PAB_1\angle = 90^\circ - \beta$ és (K.M.L. IV. évf. A talpponti háromszög 2.) $AB_1C_1\angle = \beta$, OA valóban merőleges B_1C_1-re.

(Suschnik József, műegyetemi hallgató.)

I. Megoldás. A kérdéses szeletek C_1P és PB_1, ha tehát C_1' a C_1 tükörképe OA-ra nézve, úgy külömbségük B_1C_1'.



Ha most C_1-ből merőlegest bocsátunk AA_1-re, mely A_1B_1-et C_1''-ben metszi, akkor, mivel AA_1 egyidejűleg magassága és szögfelezője C_1AC_1'' háromszögnek, ez egyenlőszárú és B_1C_1' nem más, mint az A_1C_1 és A_1B_1 oldalok külömbsége. Hogy tehát bebizonyítsuk, hogy $B_1C_1' = B_1C_1''$, az AB_1C_1' és AB_1C_1'' háromszögek egybevágóságát fogjuk kimutatni. AB_1 oldal közös, $AB_1C_1'\angle = AB_1C_1''\angle$ és $AC_1' = AC_1''$, mert C_1AC_1' háromszög egyenlőszárúságából $AC_1' = AC_1'$ és AC_1A_1 és $AC_1''A_1$ háromszögek egybevágóságából (két oldal és a közbe zárt szög) AC_1'' szintén egyenlő AC_1-gyel.

(Weisz Lipót.)

II. Megoldás. A segédtétel értelmében a köré írható kör középpontjából a talpponti háromszög oldalaira bocsátott merőlegesek átmennek a csúcsokon, és így, mivel a háromszög oldalai a talpponti háromszög külső szögfelezői, a csúcsok a talpponti háromszöget kívülről érintő köreinek középpontjai és a szóban forgó merőlegesek talppontjai az érintési pontok. Ha az A körül írt kör másik két érintési pontja R és S úgy

$$A_1R = A_1S$$

$$A_1C_1 + C_1R = A_1B_1 + B_1S.$$

De

$$C_1R = C_1P$$

és

$$B_1S = B_1P$$

tehát

$$A_1C_1 + C_1P = A_1B_1 + B_1P$$

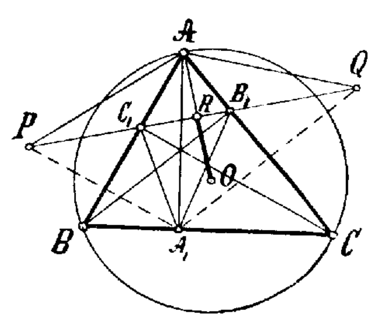
a honnan

$$A_1C_1 - A_1B_1 = B_1P - C_1P$$

(Preisz Károly.)

III. Megoldás. Legyen A_1-nek a c oldalra vonatkozó tükörképe P és a b oldalra vonatkozó tükörképe Q, akkor, mivel a háromszög oldalai a talpponti háromszög külső szögfelezői, P és Q a B_1C_1 egyenesre esnek és

(1) $$PC_1 = A_1C_1,\ B_1Q = A_1B_1.$$



Az ily módon keletkezett PAQ háromszög egyenlőszárú, mert AP és AQ AA_1-nek tükörképei, és mivel a segédtétel értelmében OR merőleges átmegy az A csúcson, R e háromszög magasságának talppontja, mely az alapot felezi. Tehát

$$PC_1 + C_1R = RB_1 + B_1Q.$$

Az (1) alatti értéket betéve

$$A_1C_1 + C_1R = RB_1 + A_1B_1,$$

a honnan csakugyan

$$C_1R - RB_1 = A_1B_1 - A_1C_1.$$

(Visnya Aladár.)

A feladatot még megoldották: Devecis M., Eislitzer Gy., Friedmann B., Grünhut B., Kornis Ö., Kunsch M., Riesz F., Suschnik J.