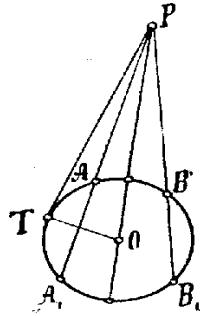


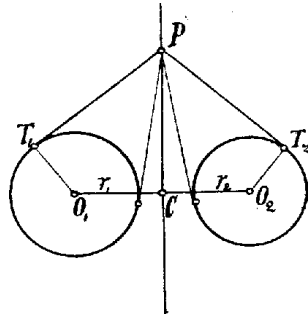
A feladat megoldását megelőzőleg néhány tételt mutatunk be, melyek már nem tartoznak középiskolánk tananyagához.

1. Ismeretes, hogy ha egy tetszés szerinti P pontból a kört metsző sugarakat vonunk, úgy az egyes sugarak szeleteinek szorzata állandó számérték; így pl. $PA \cdot PA_1 = PB \cdot PB_1 = \text{const.}$



Ezen számértéket a P pontnak a körre vonatkozó *hatványának* nevezzük. Ha P pont a körön kívül fekszik, úgy a körre vonatkozó hatványa egyenlő a körhöz vont érintő négyzetével, tehát: \overline{PT}^2 . Ha pedig egy a kör középpontján átmenő sugarat tekintünk, úgy P pont hatványa egyenlő $(PO + r)(PO - r) = \overline{PO}^2 - r^2$, vagyis ekkor P hatványát megkapjuk, ha a kör középpontjától való távolságának négyzetéből kivonjuk a sugár négyzetét.

2. Ha a síkban két kört veszünk fel, úgy bizonyára sok oly pont van, melynek a két körre vonatkozó hatványa egyenlő. Ezen pontok mértani helyét *hatványvonalnak* nevezzük. A hatványvonal merőlegesen áll a két kör centrálisára.



Legyen ugyanis P a hatványvonalnak egy pontja, úgy

$$\overline{PO}_1^2 - r_1^2 = \overline{PO}_2^2 - r_2^2$$

de

$$\overline{PO}_1^2 = \overline{PC}^2 + \overline{O}_1\overline{C}^2, \quad \overline{PO}_2^2 = \overline{PC}^2 + \overline{O}_2\overline{C}^2$$

s így

$$\overline{O}_1\overline{C}^2 - r_1^2 = \overline{O}_2\overline{C}^2 - r_2^2$$

mely egyenlet mutatja, hogy C csakugyan pontja a hatványvonalnak.

3. Két egymást érintő kör hatványvonala a két kör közös érintője, mert ekkor:

$$\overline{PO}_1^2 - r_1^2 = \overline{PO}_2^2 - r_2^2 = \overline{PC}^2.$$

4. Két egymást metsző kör hatványvonala a két kör közös szelője. Ha ugyanis a két kör egyik metszéspontját P -vel jelöljük, úgy

$$\overline{PO}_1^2 - \overline{O}_1\overline{C}^2 = \overline{PO}_2^2 - \overline{O}_2\overline{C}^2$$

de

$$\overline{PO}_1 = r_1, \quad \text{és} \quad \overline{PO}_2 = r_2$$

s így

$$\overline{O}_1\overline{C}^2 - r_1^2 = \overline{O}_2\overline{C}^2 - r_2^2.$$

5. A hatványvonalnak egy tetszés szerinti pontjából a körközvont érintők egyenlők; $PT_1 = PT_2$, a mi a hatványdefiniójából következik.

Ezen tételek alkalmazásával könnyen megszerkeszthetjük két egymást sem nem érintő, sem nem metsző körnek hatványvonalát. Rajzolunk ugyanis egy harmadik kört, mely az adott köröket metszi. Két-két körnek közös szelői P pontban metszik egymást, melyből a megadott körök centrálisára merőlegest vonva, megkapjuk a keresett hatványvonalat.

Feladatunk értelmében oly pontot kell keresnünk, melyből három adott körhöz egyenlő hosszú érintőket vonhatunk. E pont a körök hatványvonalainak metszéspontja s így az előbbiek alapján könnyen megszerkeszthető. A kör sugara a középpontjából bármely körhöz vont érintő.

A feladatot megoldották. Friedmann B., Grünhut B., Klein M., Kornis Ö., Riesz F., Roth M., Weisz Á.