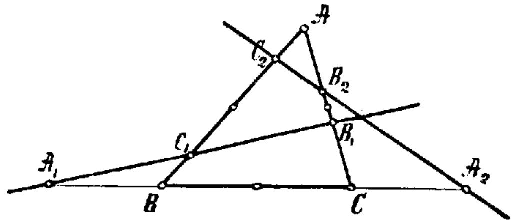
1°. Tegyük fel, hogy az A_1, B_1 és C_1 pontok egy egyenesbe esnek; bizonyítsuk be, hogy az A_2, B_2 és C_2 pontok is egy egyenesbe esnek, föltéve, hogy az A_1, A_2, a B_1, B_2 és C_1, C_2 pontok a megfelelő oldalt felező ponthoz képest symmetrikusan feküsznek.



Miután az A_1, B_1 és C_1 pontok egy egyenesbe esnek, a Menelaos-féle tétel értelmében:

$$\frac{A_1C}{A_1B}\cdot\frac{C_1B}{C_1A}\cdot\frac{B_1A}{B_1C}=1$$

De a föltétel szerint:

$$A_1B=A_2C,\quad A_1C=A_2B,\quad B_1C=B_2A,\quad B_1A=B_2C,\quad C_1A=C_2B,\quad C_1B=C_2A$$

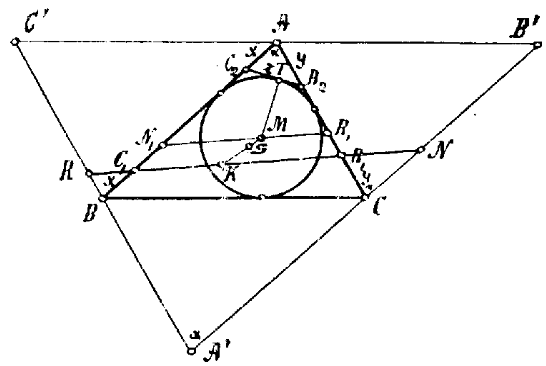
tehát

$$\frac{A_2C}{A_2B}\cdot\frac{C_2B}{C_2A}\cdot\frac{B_2A}{B_2C}=1$$

a mi azt mondja, hogy az A_2, B_2 és C_2 pontok szintén egy egyenesbe esnek.

2°. Legyenek az ABC háromszög oldalai a, b és c; C_2B_2 az egyik egyenes, mely a háromszögbe írható kört T pontban érinti, C_1B_1 a másik egyenes. Húzzunk az ABC háromszög csúcsain keresztül a szemközt fekvő oldalakkal párhuzamosokat; ez által az $A'B'C'$ háromszöget nyerjük, mely ABC háromszöghöz hasonló; belső hasonlósági pontjuk S-ben, a két háromszög közös súlypontjában van. Legyen C_1B_1-nek $A'C'$, illetőleg $A'B'$-tel való metszéspontja R, illetőleg N. Vonjunk M ponton keresztül RN-nel párhuzamost és legyen e párhuzamosnak az AC, illetőleg AB oldalakkal való metszéspontja R_1, illetőleg N_1. Legyen végre

$$BC_1=AC_2=x,\ CB_1=AB_2=y\ \textit{és} C_2B_2=z.$$



A B_1CN és B_1AC_1 háromszögek hasonlóságából következik, hogy:

$$\frac{CN}{c-x}=\frac{y}{b-y}$$

honnan

$$CN=\frac{y(c-x)}{b-y}$$

és így

(1) $$A'N'=A'C+CN=c+\frac{y(c-x)}{b-y}=\frac{bc-xy}{b-y}$$

Hasonlóképpen levezethető, hogy:

$$A'R=\frac{bc-xy}{c-x}$$

De az $A'NR$ háromszögnek az NR oldalhoz tartozó szögfelezőjének a hossza.

$$v=\frac{2A'N\cdot A'R}{A'N+A'R}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}=2\frac{\frac{(bc-xy)^2}{(b-y)(c-x)}}{\frac{bc-xy}{b-y}+\frac{bc-xy}{c-x}}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{2(bc-xy)}{b+c-x-y}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Az AN_1R_1 háromszögnek az N_1R_1 oldalhoz tartozó szögfelezője pedig, mint az ABC háromszög BC oldalához tartozó szögfelezőjének $AM = v_1$ része:

$$v_1 = \frac{2bc}{a+b+c} \cos \frac{\alpha}{2}$$

és így

$$v : v_1 = \frac{bc - xy}{b+c-x-y} : \frac{bc}{a+b+c} \tag{2}$$

MT, mint az ABC háromszögbe írható kör sugara:

$$MT = \frac{bc \sin \alpha}{a+b+c}$$

és mint az AC_2B_2 háromszöget kívülről érintő körnek a sugara:

$$MT = \frac{xy \sin \alpha}{x+y-z}$$

és így

$$\frac{bc}{a+b+c} = \frac{xy}{x+y-z} \tag{3}$$

a (2) aránylat tehát így alakul.

$$v : v_1 = \frac{bc - xy}{b+c-x-y} : \frac{xy}{x+y-z} \tag{4}$$

A (3)-ból következik,hogy

$$\frac{bc}{xy} = \frac{a+b+c}{x+y-z}$$

és

$$\frac{bc - xy}{xy} = \frac{b+c-x-y+a+z}{x+y-z}$$

De a BCB_2C_2 négyszög érintő négyszög lévén:

$$b + c - x - y = a + z$$

és így

$$\frac{bc - xy}{xy} = \frac{2(b+c-x-y)}{x+y-z}$$

honnan

$$\frac{bc - xy}{b+c-x-y} = \frac{2xy}{x+y-z}$$

és a (4) aránylat következőképp alakul

$$v : v_1 = \frac{2xy}{x+y-z} : \frac{xy}{x+y-z}$$

vagyis

$$v = 2v_1.$$

Az $A'NR$ és AN_1R_1 hasonló háromszögekben tehát a megfelelő szögfelezők aránya $2:1$, miből következik, hogy

$$NR : N_1R_1 = 2 : 1$$

és

$$NR = 2N_1R_1$$

Az NR és N_1R_1 egyenesek tehát az $A'B'C'$ és ABC hasonló háromszögekben megfelelő egyenesek; s miután a K és M pontok megfelelő egyeneseken feküsznek és összeköttetésük a hasonlósági ponton, S-en megy keresztül, következik, hogy:

$$SK : SM = 2 : 1.$$

Látni való, hogy a K pont nem más, mint az $A'B'C'$ háromszögbe írható kör középpontja.

(Weisz Lipót, Pécs.)

A feladatot még megoldotta: Visnya Aladár.