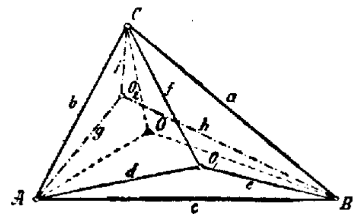
I. *Megoldás.*



1.° O_1AB, O_1BC és O_1CA háromszögekből kapjuk, hogy

$$\frac{d}{e}=\frac{\sin(ce)}{\sin(cd)},\ \frac{e}{f}=\frac{\sin(af)}{\sin(ae)},$$

$$\frac{f}{d}=\frac{\sin(bd)}{\sin(bf)},$$

ezen egyenleteket egymással szorozva:

(1) $$\frac{\sin(af)\cdot\sin(bd)\cdot\sin(ce)}{\sin(ae)\cdot\sin(bf)\cdot\sin(cd)}=1.$$

Ez kriteriuma annak, hogy a három egyenes $(d,\ e,\ f)$ egy pontban találkozik; $(g,\ h,\ i)$ egyenesek is egy pontban metszik egymást, ha

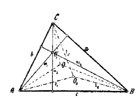
(2) $$\frac{\sin(ah)\cdot\sin(bi)\cdot\sin(cg)}{\sin(ai)\cdot\sin(bg)\cdot\sin(ch)}=1.$$

A feltételek értelmében:

$$(ah)=(ce),\ (bi)=(af),\ (cg)=(bd),\ (ai)=(bf),\ (bg)=(cd),\ (ch)=(ae);$$

ezeket (2)-be téve, csakugyan az (1) alatti egyenletet kapjuk.

2.° (bm_3) és (cm_2) szögek egyenlők, mert száraik egyenlők.



De

$$(bm_3)=(ar_3)\ \textit{és}\ (cm_2)=(ar_2),$$

tehát

$$(ar_3)=(ar_2),$$

vagyis $BO_2C\triangle$ egyenlő szárú háromszög s így $BO_2=CO_2$. Épp így kimutathatjuk, hogy $AO_2=BO_2=CO_2$; ezek tehát a háromszög köré írható kör sugarai és O_2 a kör középpontja.

3.°

(3) $$(ab)+(bc)+(ca)=180°,$$

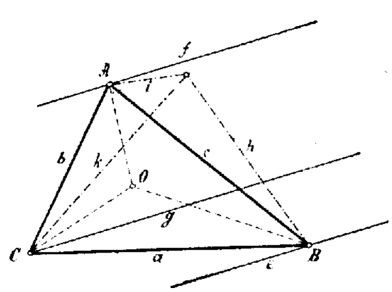
de

$$(ab)=(ag)+(gb)$$

$$(ag)=(ae)=(ch)\ \textit{és}\ (gb)=(bf)=(ci),$$

tehát

(4) $$(ab)=(ch)+(ci)$$



(4)-et (3)-ba téve:

$$(ch)+(ca)+(ci)+(bc)=180^\circ,$$

vagyis

$$(ah)+(bi)=180^\circ;$$

$ACBO_1$ tehát húrnégyszög s így O_1 az ABC háromszög köré írható kör kerületén fekszik.

(Strasser G. Sándor, I. é. bölcsészethallgató, Budapest.)

II. *Megoldás.* 1.° Legyenek AA'' és AA', BB'' és BB', CC'' és CC' a megfelelő szögfelezőkhöz képest symmetrikusan fekvő egyenesek; bebizonyítandó, ha a Ceva-féle tétel értelmében:

$$\frac{C'A}{C'B}\cdot\frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{B'C}{B'A}=-1, \tag{1}$$

akkor

$$\frac{C''A}{C''B}\cdot\frac{A''B}{A''C}\cdot\frac{B''C}{B''A}=-1, \tag{2}$$

Kimutathatjuk, hogy

$$\frac{A''B}{A''C}\cdot\frac{A'B}{A'C}=\frac{c^2}{b^2},\quad \frac{B''C}{B''A}\cdot\frac{B'C}{B'A}=\frac{a^2}{c^2},\quad \frac{C''A}{C''B}\cdot\frac{C'A}{C'B}=\frac{b^2}{a^2}.$$

Ezen egyenleteket egymással szorozva s (1)-et tekintetbe véve, csakugyan (2)-t kapjuk.

2.° A tétel második részének bebizonyítása végett elégséges kimutatnunk azt, hogy a háromszög AA' magassága és az AO egyenes (O a háromszög köré írható kör középpontja) symmetrikusan fekszenek a szögfelezőhöz képest. E végből nyújtsuk meg az AO sugarat, míg a kört P-ben metszi. Ekkor $ABC\angle=APC\angle$, mint ugyanazon íven nyugvó kerületi szögek; így tehát $90^\circ-ABC\angle=90^\circ-APC\angle$, vagyis -$BAA'\angle=PAC\angle$, a mi azt mondja, hogy OA és AA' symmetrikusan fekszenek az A szöget felező egyeneshez képest.

(Weisz Lipót, Pécs.)

III. *Megoldás.* 1.° A háromszög szögei 2α, 2β, 2γ. Az egyeneseknek a szögfelezőkkel képezett szögei megfelelő sorrendben δ, ε, η. Három egyenes O' pontban, másik két -C-ből és B-ből vont - egyenes O'' pontban találkozik. O''-t A-val egybekötve, $OAO''=\varphi$ szöget nyerünk (a szögfelezők O-ban metszik egymást); a tétel első része helyes, ha $\varphi=\delta$. Az első megoldáshoz hasonló úton találjuk, hogy $\frac{\sin(\alpha+\delta)}{\sin(\alpha-\delta)}=\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\sin(\alpha-\varphi)}$; az összegek, illetőleg külömbségek függvényeinek kifejtése és az egyenlet rendezése után kitűnik, hogy $\varphi=\delta$.

(Riesz Frigyes, Győr.)

A feladatot még megoldották: Visnya Aladár, I. é. b. h., Bálint Béla, Freund Antal, Friedmann Bernát, Grünhut Béla, Hofbauer Ervin, Kántor Nándor, Klein Mór, Kornis Ödön.