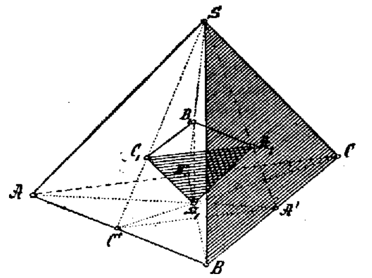
Legyen $SABC$ az eredeti tetraëder.



Legyenek A', B' és C' a tetraëder alapéleit felező pontok; A_1 B_1 C_1 és S_1 a tetraëder lapjainak súlypontjai. E feltételek értelmében tehát:

$$A'A_1 : A'S = A'S_1 : A'A = 1 : 3$$

$A'A_1S_1$ és $A'SA$ háromszögek tehát hasonlók és így A_1S_1 párhuzamos AS éllel, egyszersmind:

$$A_1S_1 : AS = 1 : 3$$

Hasonlóképpen bebizonyítható, hogy $B_1S_1 \parallel BS$ és $C_1S_1 \parallel CS$.

Továbbá miután

$$SA' : SC' = SA_1 : SC_1$$

A_1C_1 párhuzamos $A'C'$-vel és minthogy

$$BA' : BC' = BC : BA$$

AC is párhuzamos $A'C'$-vel, miből következik, hogy A_1C_1 párhuzamos AC-vel. Hasonlóképpen kimutatható, hogy B_1C_1 párhuzamos BC-vel és A_1B_1 párhuzamos AB-vel; tehát a súlypont tetraëder élei az eredeti tetraëder éleivel párhuzamosak, miből következik, hogy hasonlók és köbtartalmaik aránya egyenlő a megfelelő élek köbeinek arányával.

(1)
$$\frac{S(ABC)}{S_1(A_1B_1C_1} = \left(\frac{AB}{A_1B_1}\right)^3 = 3^3.$$

Ha az eredeti tetraëder csúcspontjain keresztül a szemben fekvő lapokkal párhuzamos síkokat vezetünk, akkor az így keletkezett $S_2(A_2B_2C_2)$ tetraëdernek súlypont-tetraëderjét az eredeti $S(ABC)$ tetraëder képezi és így

(2)
$$\frac{S_2(A_2B_2C_2)}{S(ABC)} = 3^3$$

Az 1) és 2) szorzata megadja a keresett arányt:

$$\frac{S_2(A_2B_2C_2)}{S_1(A_1B_1C_1)} = 3^6.$$

A három tetraëder térfogatainak viszonya tehát:

$$1 : 27 : 729.$$

(Weisz Lipót, főreálisk. VIII. o. t., Pécs.)

A feladatot megoldották: [1] Strasser G. Sándor. I. é. bölcsészet hallg. és Visnya Aladár I. év. bölcsészethallgató; továbbá: Bálint Béla, Berger Hugó, Devecis Mihály, Freund Antal, Friedmann Bernát, Goldstein Zsigmond, Grünhut Béla, Hofbauer Ervin, Kántor Nándor, Klein Mór, Kunsch Mátyás, Monoky Gyula, Piovarcsy Jenő, Riesz Frigyes, Schólcz Károly, Szabó István, Szigeth Gábor.

[1] *Jegyzet.* A legtöbb megfejtő *szabályos* tetraëdert tételez föl, pedig a feladat bármely tetraëderre vonatkozik.