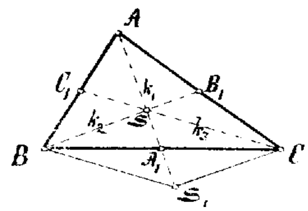
1. A Ceva-féle tétel[1] értelmében a középvonalak egy pontban metszik egymást, mert $A_1B = -A_1C$, $B_1C = -B_1A$, $C_1A = -C_1B$ és így:

$$\frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} = (-1)^3 = -1.$$



2. Hosszabbítsuk meg $AA_1 = K_1$ középvonalat és mérjük rá $A_1S_1 = A_1S = \frac{1}{3}K_1$ darabot; rajzoljuk meg továbbá S_1B és S_1C segédegyeneseket; akkor SBS_1C négyszöget nyerjük, mely egyenközény, mert SS_1 és BC átlói az A_1 pontban felezik egymást; ennélfogva $S_1C = SB = \frac{2}{3}K_2$ és $S_1B = SC = \frac{2}{3}K_3$. SBS_1 és SCS_1 háromszög oldalai tehát $\frac{2}{3}K_1$, $\frac{2}{3}K_2$ és $\frac{2}{3}K_3$. Ezek alapján tehát a *szerkesztés* következőképpen történik: $SS_1 = \frac{2}{3}K_1$ fölé $\frac{2}{3}K_2$ és $\frac{2}{3}K_3$ oldalakkal megszerkesztjük az SBS_1 és SCS_1 háromszögeket; az így keletkezett egyenközény B és C csúcsai egyúttal a keresett háromszög két csúcsát képezik; ezután SS_1-et meghosszabbítjuk és még egyszer ráмérjük $SS_1 = SA$ darabot, miáltal A-t, a háromszög harmadik csúcsát nyerjük.

3. AA_1B és AA_1C háromszögekből a cosinus tételt alkalmazva, nyerjük:

$$c^2 = \frac{a^2}{4} + K_1^2 - aK_1\cos\varepsilon$$

$$b^2 = \frac{a^2}{4} + K_1^2 + aK_1\cos\varepsilon$$

ha $\varepsilon = AA_1B\sphericalangle$; a két egyenletet összeadva:

$$b^2 + c^2 = \frac{a^2}{2} + 2K_1^2,$$

miből

$$4K_1^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2 \tag{1}$$

épp így

$$4K_2^2 = 2c^2 + 2a^2 - b^2 \tag{2}$$

$$4K_3^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2. \tag{3}$$

E három egyenletet összeadva.

$$4(K_1^2 + K_2^2 + K_3^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2) \tag{4}$$

(1)-ből:

$$b^2 + c^2 = \frac{4K_1^2 + a^2}{2}$$

mit (4)-be téve:

$$4(K_1^2 + K_2^2 + K_3^2) = \frac{3}{2}(3a^2 + 4K_1^2)$$

miből

$$a = \frac{2}{3}\sqrt{2(K_2^2 + K_3^2) - K_1^2}.$$

Épp így kapjuk, hogy:

$$b = \frac{2}{3}\sqrt{2(K_3^2 + K_1^2) - K_2^2}$$

$$c = \frac{2}{3}\sqrt{2(K_1^2 + K_2^2) - K_3^2}.$$

[1] Lásd: A Ceva-féle tétel és alkalmazása; Középiskolai Mathematikai Lapok, II. évfolyam, 94. lap.

Hogy a háromszög területét kiszámíthassuk, tekintetbe vesszük, hogy SCS_1 háromszög t területe harmadrésze az ABC háromszög T területének: de SCS_1 háromszög oldalai $\frac{2}{3}K_1$, $\frac{2}{3}K_2$, $\frac{2}{3}K_3$, s így a területe:

$$t=\frac{1}{9}\sqrt{(K_1+K_2+K_3)(K_2+K_3-K_1)(K_1+K_3-K_2)(K_1+K_2-K_3)},$$

ha továbbá $K_1+K_2+K_3=2K$, akkor

$$t=\frac{4}{9}\sqrt{K(K-K_1)(K-K_2)(K-K_3)}$$

s így ABC háromszög területe:

$$T=\frac{4}{3}\sqrt{K(K-K_1)(K-K_2)(K-K_3)}.$$

4. Legyen pl. $K_2=K_3$; ekkor CSB háromszög egyenlőszárú, mert $SB=SC=\frac{2}{3}K_2=\frac{2}{3}K_3$; tehát SA_1 középvonal az SCB háromszögnek egyúttal magassága, s mint ilyen merőleges az alapra. De SA_1 egybeesik AA_1-gyel, miért is AA_1 középvonalból ugyancsak magasság lesz, tehát merőleges BC-re s így ABC háromszög csakugyan egyenlőszárú.

(Grünhut Béla, főreálisk. VIII. o. t. Pécs.)

A feladatot még megoldották: Berger Hugó, Feuer Mór, Friedmann Bernát,Goldstein Zsigmond, Goldziher Károly, Hofbauer Ervin, Kántor Nándor, Kornis Ödön, Riesz Frigyes, Szabó István.