*Első megoldás.*

A magasságok metszési pontja egyenlő távolságban van a tetraëder csúcsaitól, valamint a lapoktól is, miért is ezen pont középpontja azon gömböknek, melyek a tetraëderbe és a tetraëder köré írhatók. Ha e pontot a tetraëder csúcsaival összekötjük, úgy négy egyenlő köbtartalmú gúlát nyerünk, melyeknek alapja a tetraëdernek egy-egy oldallapja, magassága a beírható gömb sugara. A tetraëder köbtartalma:

(1) $$V=\frac{a^3}{12}\sqrt{2}$$

Tehát egy gúla köbtartalma:

(2) $$v=\frac{a^3}{48}\sqrt{2}$$

A tetraëder egy oldallapjának a területe:

(3) $$t=\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$$

s így egy gúla magassága, mely egyúttal a beírt gömb sugara:

(4) $$r=\frac{a}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{a}{12}\sqrt{6}$$

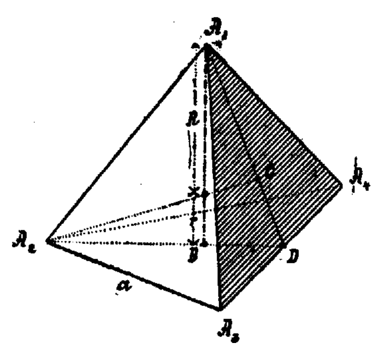
A tetraëder köré írt gömb sugarát megkapjuk, ha a beírt gömb sugarát a tetraëder magasságából kivonjuk; a tetraeder magassága: $a\sqrt{\frac{2}{3}}$, s így

(5) $$R=a\sqrt{\frac{2}{3}}-\frac{a}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{3a}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{a}{4}\sqrt{6}$$

*(Hofbauer Ervin, főgymn. VII. o.t., Budapest, ág. h. ev. főgymn.)*

*Második megoldás.*

A tetraëder köré írható gömb sugara $R=OA_1$, a tetraëderbe írható gömb sugara $OB=r$; $O$ a magasságok metszési pontja.




A tetraëder magassága: $a\sqrt{\frac{2}{3}}$; tehát

(1) $$A_1B=a\sqrt{\frac{2}{3}}=A_1O+OB=R+r$$

Minthogy $A_3BD$ és $A_1CO$ háromszögek hasonlók, következik, hogy

$$A_1O:A_1D=OC:BD$$

$$R:A_1D=r:\frac{A_1D}{3}$$

s így

(2) $$R=3r$$

(1)-ből és (2)-ből kapjuk:

$$R=\frac{3a}{4}\sqrt{\frac{2}{3}},\ r=\frac{a}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}$$

*(Suschnik József, főreáliskolai VIII. o.t., Kecskemét.)*

A feladatot még megoldották: Friedmann Bernát, S.-A.-Ujhely; Grünhut Béla és Visnya Aladár, Pécs.