(1) $$\sqrt[3]{x+a}-\sqrt[3]{x-a}=b$$

Első megoldás.

Az egyenlet két oldalát köbre emelve, kapjuk:

$$x+a-3\sqrt[3]{(x+a)^2}\sqrt[3]{x-a}+3\sqrt[3]{x+a}\sqrt[3]{x-a)^2}-x+a=b^3$$

$$3\sqrt[3]{(x+a)(x^2-a^2)}-3\sqrt[3]{(x-a)(x^2-a^2)}=2a-b^3$$

(2) $$3\sqrt[3]{x^2-a^2}\left[\sqrt[3]{x+a}-\sqrt[3]{x-a}\right]=2a-b^3$$

a zárójelben álló kifejezés (1) szerint b-vel egyenlő, s így:

$$3b\sqrt[3]{x^2-a^2}=2a-b^3$$

Ezen egyenlet mindkét oldalát ismét köbre emelve:

$$27b^3(x^2-a^2)=(2a-b^3)^3$$

miből

(3) $$x^2=\frac{(2a-b^3)^3}{27b^3}+a^2$$

(Visnya Aladár, főreálisk. VIII. o. t., Pécs.)

Jegyzet. A (3) alatti kifejezés még így is írható:

(4) $$x^2=\frac{8a^3+15a^2b^3+6ab^6-b^9}{27b^3}$$

A számláló $a+b^3$ kifejezéssel osztható, mert a helyébe $(-b^3)$-t téve, a számláló nulla lesz; így tehát kapjuk:

$$8a^3+15a^2b^3+6ab^6-b^9=(a+b^3)(8a^2+7ab^3-b^6)$$

s minthogy

$$8a^2+7ab^3-b^6=(a+b^3)(8a-b^3)$$

kapjuk:

$$x^2=\frac{(a+b^3)^2(8a-b^3)}{27b^3}$$

$$x=\pm(a+b^3)\sqrt{\frac{8a-b^3}{27b^3}}$$

Második megoldás.

A megadott egyenlet így is írható:

(1) $$\sqrt[3]{x+a}=b+\sqrt[3]{x-a}$$

ezen egyenletnek mindkét oldalát köbre emelve s az egyenletet rendezve, kapjuk:

(2) $$3b(\sqrt[3]{x-a})^2+3b^2\sqrt[3]{x-a}+b^3-2a=0$$

ezen egyenlet $\sqrt[3]{x-a}$-ra nézve másodfokú, s így:

$$\sqrt[3]{x-a}=\frac{-3b^2\pm\sqrt{24ab-3b^4}}{6b}$$

(3) $$x=\left[-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\frac{8a-b^2}{12b}}\right]^3+a$$

(Geist Emil, főreáliskolai VII. o. t., Győr.)

Jegyzet. Ha a zárójelben álló kifejezést köbre emeljük, könnyen nyerjük, hogy

$$x = \pm\frac{8b^3+8a}{12b}\sqrt{\frac{8a-b^3}{12b}}$$

vagy

$$x = \pm(a+b^3)\sqrt{\frac{8a-b^3}{27b^3}}$$

A feladatot még megoldották: Adonyi Dénes, főgymn. VII. o. t., S.-A.-Ujhely, Friedmann Bernát, főgymn. VII. o. t.,

S.-A.-Ujhely, Goldstein Zsigmond, főgymn. VII. o. t., Nyíregyháza; Grünhut Béla, főreál. VII. o. t., Pécs; Hofbauer Ervin és Kántor Nándor, főgymn. VII. o. t., Budapest; Messinger Ábrahám főgymn. VII. o. t. és Weisz Hermann főgymn. VI. o. t., S.-A.-Ujhely.