1°. Ha a háromszög területe t, az oldalak $a,\ b,\ c,$ akkor:

$$16t^2=(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c) \tag{1}$$

$$2t=am_1=bm_2=cm_3,$$

miből

$$a=\frac{2t}{m_1},\ b=\frac{2t}{m_2},\ c=\frac{2t}{m_3} \tag{2}$$

Ezen értékeket 1)-be téve, kapjuk:

$$16t^2=16t^4\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_3}\right)\left(\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_3}-\frac{1}{m_1}\right)\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_3}-\frac{1}{m_2}\right)\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}-\frac{1}{m_3}\right) \tag{3}$$

miből a háromszög területe:

$$t=\frac{(m_1m_2m_3)^2}{\sqrt{[(m_1m_2+m_1m_3+m_2m_3)(m_1m_3+(m_1m_2-m_2m_3)(m_2m_3+m_1m_2-m_1m_3)(m_2m_3+m_1m_3-m_1m_2)}} \tag{4}$$

Az oldalakat a (2) alatti egyenletekből számítjuk ki.

Hogy a szögeket kiszámíthassuk, a háromszöget szétbontjuk derékszögű háromszögekre; így kapjuk:

$$\sin\alpha=\frac{m_2}{c},\ \sin\beta=\frac{m_3}{a},\ \sin\gamma=\frac{m_1}{b} \tag{5}$$

vagy a (2) alatti értékeket helyettesítve:

$$\sin\alpha=\frac{m_2m_3}{2t},\ \sin\beta=\frac{m_1m_3}{2t},\ \sin\gamma=\frac{m_1m_2}{2t} \tag{6}$$

2°. A megadott magasságokból háromszöget szerkesztünk, melynek magasságai legyenek: $\mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3$. E magasságokból, mint oldalakból újra háromszöget szerkesztünk; ekkor:

$$am_1=bm_2=cm_3 \tag{7}$$

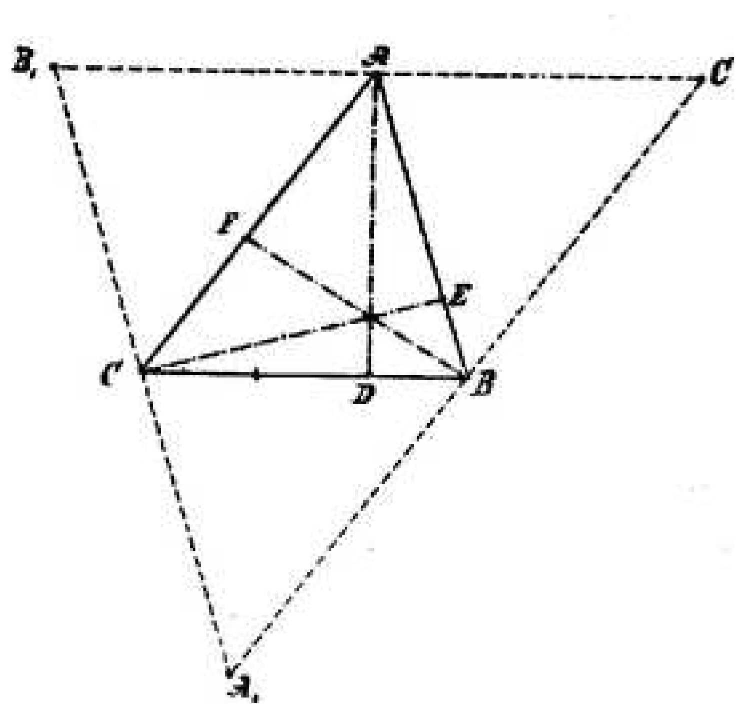
$$\mu_1m_1=\mu_2m_2=\mu_3m_3 \tag{8}$$

e két egyenletből kapjuk:

$$\frac{a}{\mu_1}=\frac{b}{\mu_2}=\frac{c}{\mu_3} \tag{9}$$

Ebből látjuk, hogy a $\mu_1,\ \mu_2$ és μ_3-ból alakított háromszög hasonló a szerkesztendő háromszöghöz. Ennélfogva meghosszabítjuk a μ_1-hez tartozó magasságot, rámérjük m_1-et s ennek végpontján át μ_1-el párhuzamost húzunk s végre meghosszabbítjuk még a μ_2 és μ_3 oldalakat, míg azok a μ_1-gyel párhuzamosan rajzolt egyenest metszik.

3°. $A,\ B$ ás C csúcsokon át a szemben fekvő oldalakkal párhuzamosokat húzunk, miáltal $A_1B_1C_1$ háromszöget nyerjük.



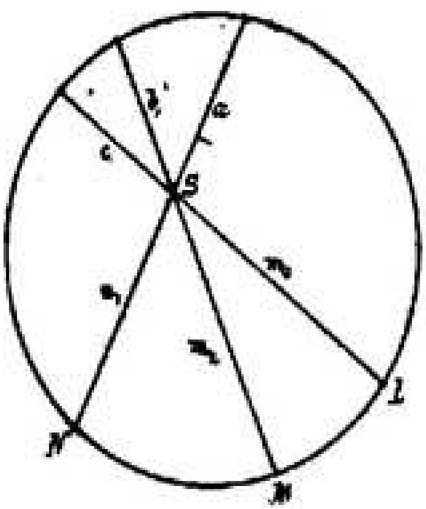
E háromszög oldalai az ABC háromszög megfelelő oldalainak kétszeresei s A, B és C pontok által feleztetnek.
Mert hisz $ACBA_1$ és $CBAC_1$ egyenközényekben

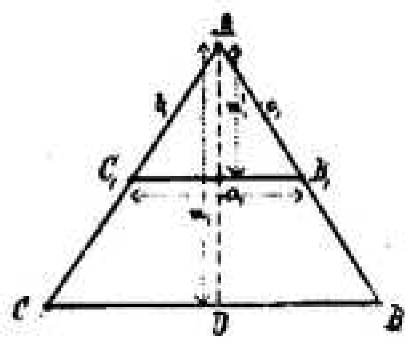
$$AC = A_1B = BC_1$$

Az eredeti háromszög magasságai tehát az $A_1B_1C_1$ háromszög oldalainak középpontjaiban emelt merőlegesek s mint ilyenek egy pontban metszik egymást.

(Pósch Gyula, a budapesti ág. h. evang. főgymn. VIII. o. t.).

Jegyzet. A háromszög még így is szerkeszthető: Rajzolunk három, egymást egy pontban – S-ben – metsző egyenest, melyekre a megadott magasságokat rámérjük. Az így nyert L, M, N pontokon át kört fektetünk, a magasságokat ellenkező irányban meghosszabbítjuk, mi által a_1, b_1, c_1 egyeneseket nyerjük. Ezeket egy háromszög oldalainak tekintve, megrajzoljuk AC_1B_1 háromszöget. E háromszög magasságai legyenek m_1', m_2', m_3'; m_1'-re rámérjük m_1-et, és D ponton át C_1B_1 oldallal párhuzamost húzunk. ABC a keresett háromszög.





Meg kell mutatnunk, hogy B pontból rajzolt magasság egyenlő m_2-vel és a C pontból rajzolt magasság egyenlő m_3-mal.
Miután az egymást metsző húrok metszeteinek szorzatai egyenlők, írhatjuk:

$$a_1m_1 = b_1m_2 = c_1m_3,$$

továbbá

$$a_1m_1' = b_1m_2' = c_1m_3',$$

miből

$$\frac{m_1}{m_1'} = \frac{m_2}{m_2'} = \frac{m_3}{m_3'}$$

De ABC és AB_1C_1 háromszögek hasonlók; ha tehát m_1'-et egyenlővé tesszük m_1-gyel, akkor m_2'-ből m_2 és m_3'-ból m_3 lesz.
A feladatot megoldották: Friedmann Bernát, S.-A.-Ujhely; Szabó István, Debreczen; Geist Emil és Szabó Gusztáv, Győr; Grünhut Béla és Visnya Aladár, Pécs.