1° Húzzuk meg a kis körben AOQ átmérőt. Ekkor az APQ derékszögű háromszögben

$$4r^2 = AP^2 + PQ^2$$

De minthogy

$$PQ = PC - QC = PC - BP$$

s így tehát

$$4r^2 = PA^2 + PB^2 + PC^2C - 2PB \times PC$$

vagy

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 = 4r^2 + 2PB \times PC$$

De $4r^2$ állandó és $PB \times PC$, mint a P pontnak a nagyobb körre vonatkozó *hatványa* szintén állandó, tehát állandó a $4r^2 + PB \times PC$ összeg és vele együtt a $PA^2 + PB^2 + PC^2$ *kifejezés* is.

Az APC *háromszögből következik, hogy*:

$$AC^2 = AP^2 + PC^2$$

s az APB háromszögből, hogy:

$$AB^2 = AP^2 + PB^2$$

Minthogy továbbá

$$BC^2 = (BP + PC)^2 = PB^2 + PC^2 + 2PB \times PC$$

lesz végre

$$AB^2 + BC^2 + CA^2 = 2(PA^2 + PB^2 + PC^2 + PB \times PC)$$

miből az előbbiek alapján következik, ez utóbbi kifejezés állandósága is.

2° Az ABC háromszög súlypontja G azonos az APQ háromszögével, mert AR transzversálison fekszik A-tól $\frac{2}{3}AR$ távolságra, hol R a BC ill. PQ távolság felező pontja. De az APQ derékszögű háromszög súlypontja PO sugáron is fekszik, P-től $\frac{2}{3}$ PO távolságra, tehát állandó, s így az ABC háromszög súlypontja is állandó.

3° Legyenek az $AB,\ BC$ és CA oldalok felező pontjai $T,\ R,\ S$. Minthogy

$$AG : GR = BG : GS = CG : GF = 2 : 1$$

G nem más, mint a keresett mértani helyek közös belső hasonlósági pontja. A mértani helyek tehát koncentrikus körök, s mivel B és C egy kör kerületén mozognak az S és T mértani helyei egybeesnek. Minthogy az R pont mértani helye az OP mint átmérő fölött leírt kör, a mértani helyek közös középpontja az OP egyenes felező pontja.

(Visnya Aladár, főreálisk. VIII. oszt.tan., Pécsett.)

A feladatok még megoldották: Grünhut Béla és Weisz Lipót, Pécsett.