Első megoldás

1°. Az LAB háromszögnek és az $S_1A'B'$ egyenes metszéséből következik *Menelaus*-tételénél fogva, hogy:

$$\frac{LA'}{AA'} \cdot \frac{AS_3}{BS_3} \cdot \frac{BB'}{SB'} = 1 \tag{1}$$

Hasonlóképpen az LBC és $S_1B'C'$ és az LCA és $S_2C'A'$ metszéséből, miszerint:

$$\frac{LB'}{BB'} \cdot \frac{BS_1}{CS_1} \cdot \frac{CC'}{LC'} = 1 \tag{2}$$

$$\frac{LC'}{CC'} \cdot \frac{CS_2}{AS_2} \cdot \frac{AA'}{LA'} = 1 \tag{3}$$

Ha az (1), (2) és (3) alatti egyenleteket egymással megszorzom és kellőképpen rövidítek, a következő relációt kapom:

$$\frac{AS_3}{BS_3} \cdot \frac{BS_1}{CS_1} \cdot \frac{CS_2}{AS_2} = 1 \tag{4}$$

mely ugyancsak a *Menelaus*-tétele értelmében szükséges és elegendő feltétele annak, hogy az S_1, S_2 és S_3 pontok egy egyenesben feküdjenek.

2°. Az S_1S_2C' háromszög és az $A'B'S_3$ egyenes, továbbá az S_1S_2C háromszög és az ABS_3 egyenes metszéséből következik, hogy:

$$\frac{C'A'}{S_2A'} \cdot \frac{S_2S_3}{S_1S_3} \cdot \frac{S_1B'}{C'B'} = 1 \tag{5}$$

és

$$\frac{S_2A}{CA} \cdot \frac{CB}{S_1B} \cdot \frac{S_1S_3}{S_2S_2} = 1 \tag{6}$$

Az S_2CC' háromszög és az LAA' egyenesek metszéséből pedig, hogy:

$$\frac{S_2A'}{C'A'} \cdot \frac{C'L}{CL} \cdot \frac{CA}{S_2A} = 1 \tag{7}$$

Az (5), (6) és (7) alatti egyenletek szorzásából és kellőképpeni rövidítéséből folyik a következő reláció:

$$\frac{S_1B'}{C'B'} \cdot \frac{C'L}{CL} \cdot \frac{CB}{S_1B} = 1 \tag{8}$$

mely szerint B, B' és L is egy egyenesben feküsznek, azaz a BB' egyenes is keresztül megy a CC' és AA' egyenesek metszőpontján L-en.

(Suschnik József, főreálisk. VIII. o. tanuló, Kecskemét).

Második megoldás

Tegyük fel először, hogy a két háromszög nem fekszik egy síkban. Ekkor az $A'B'C'$ háromszög az $(LABC)$ pyramis és az $(A'B'C')$ sík metszésidomának tekinthető és az S_1, S_2 és S_3 pontok mint az (ABC) és $(A'B'C')$ síkok ***közös*** pontjai csak az említett két sík metszésvonalában fekhetnek.

Ha megfordítva S_1, S_2 és S_3 egyenesben fekszik, akkor az AA', BB' és CC' egyenesek közül kettő-kettő egy-egy síkban fekszik és így tehát mindegyik a másik kettőt metszi. Ha a metszéspontok nem esnének egy L pontba az AA', BB' és CC' egyenesek szükségképpen egy síkban feküdnének, mi az esetre, ha az (ABC) és $(A'B'C')$ síkok egymástól külömböznek, nem lehetséges.

Ha másodszor az (ABC) és $(A'B'C')$ háromszögek egy síkban feküsznek, kössük össze a tér egy tetszésszerinti L' pontját az A, B és C pontokkal és az LL' egyenes egy tetszőleges L'' pontját az A', B' és C' pontokkal.

Ekkor az $L'A$ és $L''A'$ egyenesek egymást egy A'', az $L'B$ és $L''B'$ egyenesek egy B'' és az $L'C$ és $L''C'$ egyenesek egymást egy C'' pontban metszik. Minthogy pedig az AB, $A'B'$ és $A''B''$ egynesek egymást páronkint átmetszik a nélkül, hogy egy síkban feküdnének, az előbbiek értelmében egy-ugyanazon S_3 pontban találkoznak, hasonlóképpen a BC, $B'C'$ és $B''C''$ egyenesek egymást az S_1, a CA, $C'A'$ és $C''A''$ egyenesek egymást az S_2 pontban metszik.

E pontok mint az (ABC) vagy $(A'B'C')$ és az $(A'B''C'')$ sík *közös* pontjai egy egyenesben, az előbb említett síkok metszésvonalában feküsznek.

Ha megfordítva S_1, S_2 és S_3 egy S egyenesben feküsznek, a tér egy tetszőleges L'' pontját összekötjük az A', B' és C' pontokkal és ez összekötő egyenesek metszéspontjait egy tetszőleges S-en keresztül fektetett síkkal fölkeressük. Legyenek e metszéspontok A'', B'' és C''; ekkor azonban az A"A, B"B, és C"C egyenesek egymást páronkint egy közös L' pontban metszik. De ekkor végre az AA', BB', és CC' egyenesek is egymást az $L'L$" egyenes és az (ABC) illetőleg $(A'B'C')$ sík metszéspontjában L-ben metszik.

Szerkesztő.

(A feladatot meg megoldották: Grünhut Béla és Visnya Aladár Pécsett).