A helyettesítés után az egyenlet bal oldala e következő alakot ölti:

$$A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F',$$

mely kifejezésben:

$$A' = A\alpha^2 + 2B\alpha\alpha' + C\alpha'^2$$
$$B' = A\alpha\beta + B(\alpha\beta' + \alpha'\beta) + C\alpha'\beta'$$
$$C' = A\beta^2 + 2B\beta\beta' + C\beta'^2$$
$$D' = (A\gamma + B\gamma' + D)\alpha + (B\gamma + C\gamma' + E)\alpha'$$
$$E' = (A\gamma + B\gamma' + D)\gamma + (B\gamma + C\gamma' + E)\gamma' + (D\gamma + E\gamma' + F).$$

Hogy ezek közül $B' = D' = E' = 0$ legyen, kell, hogy

$$(A\gamma + B\gamma' + D)\alpha + (B\gamma + C\gamma' + E)\alpha' = 0$$
$$(A\gamma + B\gamma' + D)\beta + (B\gamma + C\gamma' + E)\beta' = 0$$
$$A\alpha\beta + B(\alpha\beta' + \alpha'\beta) + C\alpha'\beta' = 0$$

legyen.

Ha $\alpha\beta' - \alpha'\beta$ nem zérus, akkor

$$A\gamma + B\gamma' + D = 0$$
$$B\gamma + C\gamma' + E = 0$$

mely egyenletekből meghatározható γ és γ' értéke.

$$\gamma = \frac{BE - CD}{AC - B^2}$$

$$\gamma' = \frac{BD - AE}{AC - B^2}$$

Ha $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 0$ volna, vagyis $\dfrac{\alpha}{\alpha'} = \dfrac{\beta}{\beta'}$, $\beta = \lambda\alpha$, $\beta' = \lambda\alpha'$, akkor nemcsak $\beta' = 0$, hanem egyidejűleg $A' = C' = 0$, vagyis a transzformált kifejezés x'-et és y'-et egyáltalában nem is tartalmazná. Ezért ezen esetet további vizsgálódásainkból kizárják.

Hogy γ és γ' véges értékűek legyenek, kell, hogy az $AC - B^2 = \Delta$ kifejezés zérustól külömbözzék, vagyis, hogy

$$\Delta \lesseqgtr 0.$$

Ha $\Delta = 0$, akkor γ és γ' csak akkor lehet véges, ha egyidejűleg $BE - CD = BD - AE = 0$. Ezen esetet egyelőre függőben hagyjuk.

Az F' kifejezés a γ és γ' értékeinek tekintetbe vételével a következő alakot ölti:

$$F' = \frac{D(BE - CD) + E(BD - AE) + F(AC - B^2)}{AC - B^2} = \frac{\Gamma}{\Delta}$$

Hogy a transzformált kifejezés az x' és y'-től független tagot is tartalmazzon, kell, hogy:

$$\frac{\Gamma}{\Delta} \lesseqgtr 0$$

mi, ha $\Delta \lesseqgtr 0$, akkor áll be, ha egyidejűleg $\Gamma \lesseqgtr 0$; ha azonban $\Delta = 0$, Γ-nak is 0-nak kell lennie, s ez éppen az előbb függőben hagyott esetben áll be, ha tudniillik egyidejűleg $BE - CD = BD - AE = 0$.

Mindezek tekintetbe vételével a transzformált kifejezés a következő alakot nyeri:

$$(A\alpha^2 + 2B\alpha\alpha' + C\alpha'^2)x'^2 + (A\beta^2 + 2B\beta\beta' + C\beta'^2)y'^2) + \frac{\Gamma}{\Delta} = 0$$

vagy ha az egész egyenletet A-val szorozzuk és elosztjuk és még $-\dfrac{\Gamma}{\Delta}$-val osztunk.

$$\frac{(A^2\alpha^2 + 2AB\alpha\alpha' + AC\alpha'^2)}{-\frac{A\Gamma}{\Delta}}x'^2 + \frac{A^2\beta^2 + 2AB\beta\beta' + AC\beta'^2}{-\frac{A\Gamma}{\Delta}} - 1 = 0$$

Ezen egyenlet még a következő alakra hozható:

$$\frac{(A\alpha+B\alpha')^2+(AC-B^2)\alpha'^2}{-\frac{A\Gamma}{\Delta}}x'^2+\frac{(A\beta+B\beta')^2+(AC-B^2)\beta'^2}{-\frac{A\Gamma}{\Delta}}y^2=1$$

Hogy ez az

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=0$$

vagy

$$\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}-1=0$$

alakot ölti, attól függ vajjon $\Delta = AC - B^2$ milyen előjelű. Ha ugyanis

$$\Delta > 0$$

akkor úgy az

$$(A\alpha+B\alpha')^2+(AC-B^2)\alpha'^2$$

valamint az

$$(A\beta+B\beta')^2+(AC-B^2)\beta'^2$$

az α, α' és β, β' minden értékrendszerénél pozitívak, s ha egyidejűleg még

$$A\Gamma < 0,$$

akkor az

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}-1=0$$

egyenletet kapjuk, s így az α, α', β és β' értékek meghatározására az

$$A\alpha^2+2B\alpha\alpha'+C\alpha'^2=-\frac{\Gamma}{\Delta a^2}$$

$$A\beta^2+2B\beta\beta'+C\beta'^2=-\frac{\Gamma}{\Delta b^2}$$

$$A\alpha\beta+B(\alpha\beta'+\alpha'\beta)+C\alpha'\beta'=0$$

egyenletek szolgálnak. Az egyenletek száma eggyel kisebb lévén az ismeretlenek számánál végtelen sok megoldást kapunk.

Hogy az adott egyenlet az

$$\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}-1=0$$

alakra legyen hozható, arra szükséges, hogy

$$\Delta < 0$$

legyen, mert az

$$(A\alpha+B\alpha')^2-(-\Delta))\alpha'^2$$

és az

$$(A\beta+B\beta')^2-(-\Delta)\beta'^2$$

kifejezések valamelyike csak akkor vehet fel negatív értékeket *is*. A keresett értékek meghatározására szolgáló egyenletrendszer különben ekkor is a föntebbi (csak némileg módosított) alakkal bír.

Arany Dániel.