

Feltétel szerint

$$(1) \quad 3xyz = 2\pi$$

$$(2) \quad xy + yz + zx = \pi$$

Továbbá

$$(3) \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

A (2) és (3)-ból következik, hogy

$$(x + y + z)^2 = 2\pi + 4$$

s így tehát

$$(4) \quad x + y + z = \sqrt{2\pi + 4}$$

Az x , y és z a következő egyenletnek gyökei;

$$(u - x)(u - y)(u - z) = 0,$$

mely kifejtve a következő alakot nyeri:

$$u^3 - (x + y + z)u^2 + (xy + yz + zx)u - xyz = 0$$

vagy az (1), (2) és (4) alatti egyenletek felhasználásával:

$$(5) \quad u^3 - \sqrt{2\pi + 4}u^2 + \pi u - \frac{2}{3}\pi = 0$$

Ha az

$$(6) \quad u^3 + au^2 + bu + c = 0$$

egyenletben az

$$u = v - \frac{a}{3}$$

helyettesítést eszközöljük, a

$$(7) \quad v^3 + 3pv + 2q = 0$$

egyenletet nyerjük, hol

$$3p = b - \frac{a^2}{3}, \quad 2q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c.$$

A (7) alatti egyenlet gyökei közt akkor van két complex gyök, ha

$$q^2 + p^3 > 0.$$

Mínt hogy

$$3p = \pi - \frac{2\pi + 4}{3} = \frac{\pi - 4}{3}$$

$$(8) \quad p = \frac{\pi - 4}{9},$$

továbbá

$$\begin{aligned} 2q &= -\sqrt{2\pi + 4} \left(\frac{4\pi + 8}{27} - \frac{\pi}{3} \right) - \frac{2\pi}{3} \\ &= +\sqrt{2\pi + 4} \frac{5\pi - 8}{27} - \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

$$(9) \quad q = \frac{(5\pi - 8)\sqrt{2\pi + 4}}{54} - \frac{\pi}{3}$$

azért

$$\begin{aligned} & \frac{(5 \times 3,14 - 8)\sqrt{4 + 2 \times 3,1415} - 18 \times 3,15}{54} < q \\ q & < \frac{(5 \times 3,15 - 8)\sqrt{4 + 2 \times 3,1416} - 18 \times 3,14}{54} \\ & \frac{+7,7\sqrt{10,2830} - 18 \times 3,15}{54} < q < \frac{+7,75\sqrt{10,2832} - 18 \times 3,14}{54} \\ & \frac{7,7 \times 3,20 - 56,70}{54} < q < \frac{+7,75 \times 3,21 - 56,52}{54} \\ & \frac{-32,06}{54} < q < \frac{-31,6425}{54} \\ & -0,60 < q < -0,58 \end{aligned}$$

tehát

$$0,33 < q^2 < 0,36$$

míg

$$\begin{aligned} & \frac{3,1415 - 4}{9} < p < \frac{3,1416 - 4}{9} \\ & -\frac{0,8585}{9} < p < -\frac{0,8584}{9} \\ & -0,0954 < p < -0,0953 \\ & -0,1 < p < -0,09 \end{aligned}$$

s így

$$\begin{aligned} & -0,001 < p^3 < -0,000729 \\ & -0,0010 < p^3 < -0,0007 \end{aligned}$$

minélfogva

$$\begin{aligned} & 0,33 - 0,0010 < q^2 + p^3 < 0,36 - 0,0007, \\ & 0,3290 < q^2 + p^3 < 0,3593; \end{aligned}$$

vagyis a (7)- és így a (6)- illetve (5)- alatti egyenlet két gyöke complex érték, s a feladat követelményeit kielégítő paralelepipedon nem létezik.

A feladatot megoldották: Friedmann Bernát, S.-A-Ujhely; ifj. Imre János, Nyíregyháza; Visnya Aladár, Pécs.