Első megoldás.
(Számítás útján.)

Tudjuk, hogy

$$\text{(1)} \qquad cos^2 \frac{A}{2} = \frac{p(p-a)}{bc} = \frac{1}{4}$$

hol

$$p - a = \frac{b+c-a}{2} = \frac{d}{2} \qquad \textit{és} \qquad p = \frac{b+c+a}{2} = \frac{d+2a}{2}.$$

Tehát

$$d(d+2a) = bc$$

s mert $a = b + c - d$,

$$d(2b + 2c - d) = bc,$$

$$\text{(2)} \qquad bc - 2d(b+c) + d^2 = 0$$

Másrészt, ha az a és a' metszéspontját A'-val jelölöm, következik, hogy:
ABC területe $= ABA'$ területe $+ACA'$ területe, vagy

$$\text{(3)} \qquad bc = (b+c)a'$$

A (2) és (3)-ból nyerem a következő értékeket:

$$b + c = \frac{d^2}{2d - a'}, \quad bc = \frac{a'd^2}{2d - a'}.$$

Tehát b és c a következő másodfokú egyenlet gyökei:

$$\text{(4)} \qquad (2d - a')X^2 - d^2X + a'd^2 = 0.$$

Az a-nak értéke:

$$\text{(5)} \qquad a = b + c - d = \frac{d(a' - d)}{2d - a'}$$

(ifj. Imre János, Nyíregyháza).

A feladatot még megoldotta: Grünhut Béla, Pécs.

Jegyzet. Hogy az a, b, c értékek a feladatnak megfeleljenek, mindenekelőtt kell, hogy pozitívok legyenek.
Az a értéke pozitív lesz, ha az

$$(a' - d)(2d - a')$$

szorzat pozitív. Ez akkor áll be, ha

$$\text{(6)} \qquad \frac{a'}{2} < d < a'$$

A b és c értékei a (4)-ből nyeretvén, látjuk, hogy a gyökök szorzata és összege a (6) alatti feltétel mellett pozitív és a két gyök maga is pozitív lesz, ha a (4) alatti egyenlet determinánsa

$$\zeta = d^4 - 4(2d - a)ad^2 \geqq 0$$

Azonban

$$\zeta = d^2(d^2 - 8a'd + 4a'^2),$$
$$= d^2[d - 2a'(2 - \sqrt{3})][d - 2a'(2 + \sqrt{3})].$$

Minthogy $d < a'$, ζ a $-[d - 2a'(2 - \sqrt{3})]$ előjelét veszi fel, vagyis pozitív vagy zérus, a szerint, amint

$$d \leqq 2a'(2 - \sqrt{3}).$$

Tehát a probléma csak akkor lehetséges, ha

$$\text{(7)} \qquad \frac{a'}{2} < d \leqq 2a'(2 - \sqrt{3})$$

Ez esetben azonban az (5)-ből tényleg következik, hogy $b+c>a$, míg másrészt kimutatható, hogy $a^2>(b-c)^2$, mely feltételek szükségesek és elegendők arra, hogy az a, b és c hosszúságokból háromszög alakíttathassék.

Szerkesztő.

Második megoldás.

(Szerkesztés útján.)

Tegyük fel, hogy a probléma meg van oldva és legyen ABC a háromszög, melyből ismerjük az A szöget, az AA' szögfelező egyenest és az $AB+AC-BC=d$ külömbséget.

Rajzoljuk meg a háromszöget belülről érintő kört. Legyen középpontja O, érintkezési pontja az AC oldallal I. Tudjuk, hogy

$$AI=\frac{1}{2}(AB+AC-BC)=\frac{d}{2}$$

Az AOI derékszögű háromszög tehát meg van határozva az AI oldal és az $OAI=\dfrac{A}{2}$ szög által. Megszerkesztjük és választunk átfogóján AO-n egy A' pontot, melynek helyzetét az $AA'=a'$ egyenletből határozzuk meg. E pontból húzunk érintőt az OI sugarú körhöz, ez lesz a háromszög BC oldala, míg az A-ból húzott második érintő az AB oldalt szolgáltatja.

Jegyzet. Hogy a probléma lehetséges legyen, kell, hogy az A' pont az O körön kívül essék, amiből következik, hogy

$$AA'\geqq AO+OI$$

vagy

$$a'\geqq\frac{d(1+\sin\frac{A}{2})}{2\cos\frac{A}{2}}.$$

Hogy az O kör a háromszöget belülről érintse, kell, hogy

$$AA'<2AO$$

vagyis

$$a'>\frac{d}{\cos\frac{A}{2}}.$$

E két egyenlőtlenség $A=120^\circ$ esetére a következőkbe megy át:

$$\frac{d(2+\sqrt{3})}{2}\leqq a<2d$$

melyek a (7) alattiakkal összeegyeztethetők.

Szerkesztő.