

Oldassék meg a következő egyenlet:

$$\frac{1-ax}{1+ax} \sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}} = 1.$$

Az  $a$  és  $b$  mely értékeinél lesznek az egyenlet gyökei valóságok?

Ha négyzetre emeljük az egyenlet két oldalát és eltávolítjuk a nevezőket, a következő egyenletet nyerjük:

$$(1-ax)^2(1+bx) = (1+ax)^2(1-bx),$$

vagy rendezve ezt

$$a^2bx^3 - (2a-b)x = 0$$

Ezen egyenlet gyökei

$$1^\circ \quad x = 0$$

$$2^\circ \quad x = \pm \frac{1}{a} \sqrt{\frac{2a-b}{b}}$$

Hogy ezek valóságok legyenek, kell, hogy

$$\frac{a}{b} \geq \frac{1}{2}$$

**Szerkesztő jegyzete:**

A 2) alatti egyenlet gyökei az 1) alatti egyenletet kielégítik ugyan, de bizonyos esetekben csak a négyzetgyök *pozitív*, másokban meg annak *negatív* értéke mellett. Hogy a gyök pozitív értéke mellett a 2) gyökei egyszersmind az 1) gyökei is legyenek, kell, hogy az

$$\frac{1-ax}{1+ax}$$

és vele együtt az

$$(1-ax)(1+ax) = (1-a^2x^2)$$

kifejezés pozitív legyen, ha  $x$  helyébe a 2) egyenlet gyökeit tesszük, vagyis ha

$$1 - \frac{2a-b}{a} > 0$$

vagyis ha

$$\frac{a}{b} < 1$$

Hogy tehát az 1) alatti egyenletet kielégítsék a 2) gyökei a négyzetgyök pozitív értékei mellett, kell, hogy  $\frac{a}{b}$  az  $\frac{1}{2}$  és 1 közé essék.

Ha  $\frac{a}{b} > 1$  a 2) gyökei az

$$\frac{1-ax}{1+ax} \sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}} = -1$$

egyenletet elégítik ki, hol a négyzetgyökét ismét pozitív értékűnek vesszük.

Ha  $\frac{a}{b} = 1$  a 2) gyökei közül csak az  $x = 0$  elégíti ki az 1) alatti egyenletet, míg az  $x = +\frac{1}{a} = +\frac{1}{b}$  az 1)-nek egyáltalában nem is gyöke.

*A feladatot megoldották: Budapesti ág. hitv. ev. főgymn. VII. osztálya; Grossmann Gusztáv fg. VIII. Budapest; Grünhut Béla; fr. VI. Pécs; ifj. Imre János, fg. VIII. Nyíregyháza; Reif Jenő, fr. VI. Pécs; Weisz Lipót, fr. VI. Pécs.*

Béérkezett még 10 megoldás, melyek részben hibásak, részben még annyira sem teljesekek, mint a fenti 6 ifjú munkatársunké.