Első megoldás.

Fentebbi feladat még így is fogalmazható: *"Ha valamely P ponton keresztül húzok egyenest, mely a parabolát A és B pontokban metszi és a P pontnak távolságait az A és B pontokon keresztül menő parabola átmérőktől a és b-től egymással megszorzom, e szorzat független a P ponton keresztül húzott egyenes irányától."*

Adjuk meg a parabolát gyújtópontja (F) és vezérvonala (d) által. A P pontot pedig a vezérvonal és a parabolatengelytől mért távolságai x_0 és y_0 által. Az A és B pontokból a vezérvonalra húzott merőlegesek talppontjai legyenek A' és B'. Az F pontnak az AB szimmetriatengelyre vonatkoztatott szimmetrikus pontja legyen F'. Végre az FF' és a (d) egyenesek metszéspontja legyen N.

Minthogy A és B a parabola pontjai, e pontokból mint középpontokból az AF és BF sugarakkal leírt körök keresztül mennek F'-en és a (d)-t A' és B' pontokban érintik.

Áll tehát, hogy

$$A'N^2 = B'N^2 = NF \times NF'$$

A P-ből a (d)-re húzott merőleges talppontját P'-tel jelölöm; bebizonyítandó, hogy

$$P'A' \times P'B' = \text{állandó}.$$

Legyen a parabolatengely és a vezérvonal metszéspontja 0. A fönntebbi egyenlőség ekkor még így is írható:

$$(P'O + ON - A'N)(P'O + ON + B'N) = \text{állandó}$$

vagy minthogy

$$A'N = B'N$$

$$(P'O + ON)^2 - A'N^2 = \text{állandó}$$

Legyen FO egyenlő p-vel, az AB egyenesnek a vezérvonallal képezett szöge α-val.

Ekkor az utolsó egyenlőség még így is írható:

$$(y_0 + p\tan\alpha)^2 - NF \times NF' = \text{állandó}$$

De

$$NF = \frac{p}{\cos\alpha}$$

$$NF' = \frac{p}{\cos\alpha} + 2(x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p\cos\alpha)$$

tehát

$$NF \times NF' = \frac{p^2}{\cos^2\alpha} + 2px_0 + 2py_0\tan\alpha - p^2$$
$$= 2px_0 + 2py_0\tan\alpha + p^2\tan^2\alpha$$

s ennélfogva kifejezésünk új alakja

$$y_0^2 + 2py_0\tan\alpha + p^2\tan^2\alpha - 2px_0 - 2py_0\tan\alpha - p^2\tan^2\alpha$$

vagyis

$$y_0^2 - 2px_0$$

mely kifejezés tényleg független α-tól.

(Meitner Elemér, főreálisk. VIII. o. t. Budapest)

Második megoldás.

Legyen a parabola egyenlete a tengely és a csúcsérintőből álló rendszerre vonatkoztatva

$$y^2 = 2px.$$

A $P(x_0, y_0)$ ponton keresztül menő egyenes egyenlete

$$y - kx = y_0 - kx_0$$

Ekkor az egyenes és a parabola metszéspontjainak A-nak és B-nek ordinátáit a következő másodfokú egyenlet gyökei szolgáltatják:

$$y - k\frac{y^2}{2p} = y_0 - kx_0.$$

vagy

$$y^2 - \frac{2p}{k}y + \frac{2p}{k}y_0 - 2px_0 = 0.$$

A keresett kifejezés, melynek állandósága bizonyítandó

$$(y_0 - y_1)(y_0 - y_2) = y_0^2 - (y_1 + y_2) + y_1 y_2.$$

De a föntebbi egyenletből

$$y_1 + y_2 = \frac{2p}{k},$$

$$y_1 y_2 = \frac{2p}{k}y_0 - 2px_0;$$

ezeket a keresett kifejezés értékébe helyettesítve, az a következő alakot ölti:

$$y_0 - \frac{2p}{k}y_0 + \frac{2p}{k}y_0 - 2px_0.$$

vagy

$$y_0^2 - 2px_0,$$

mely alak k-tól tényleg független.

Arany Dániel.