Harmadik megoldás Dr. Klug Lipót egyetemi magán tanár úrtól.

A feladat megoldása a hiperbola következő ismert tulajdonságára alapítható:

A hiperbola egy változó érintője és a két aszimptotája oly háromszögeket kerítenek be, melyeknek területei egyenlők egymással.

Osszuk az adott ABC háromszög BC, CA, AB oldalait az A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2 pontokban belsőleg $m : n = \lambda$ viszony szerint; az AA_1, AA_2, $BB_1, \dots$ egyenesek az adott háromszöget λ viszony szerint osztják.

AB, AC egyenesek, mint egy hiperbola aszimptótái és BA_2 mint annak érintője meghatározzák a hiperbolát α-t; ennek fő- és melléktengelye az A szög bel- és külszögének felezői. Ha a B, B_2 pontokon keresztül kört írunk le, melynek középpontja a hiperbola melléktengelyén van, akkor e kör a főtengelyt az α hyperbola gyújtópontjaiban metszi, míg az A pontból a gyújtópontokon keresztül leírt kör az AB, AC aszimptotákat egy derékszögű négyszög szögpontjaiban vágja, melynek a főtengelyre merőleges oldalai az α hiperbola csúcsérintői.

Az α hiperbolának ekként meg lévén határozva két csúcsa és gyújtópontja, a P pontból ahhoz körző- és vonalzóval érintő vonható, mely, ha oly helyzetű, hogy metszőpontjai az AB, AC aszimptotákkal még az AB, AC vonaldarabon vannak, az ABC háromszöget a kívánt módon osztja.

*

A mi annak megítélését illeti, hogy a P-nek mily helyzeténél lehet α-hoz 0, 1, 2 oly érintőt húzni, a mely a feladat követelményeinek megfelelőleg osztja az ABC háromszöget, a következőkre kell gondolnunk.

A α hiperbolának nemcsak a BB_2, hanem a CC_1 is érintője, még pedig e vonaldarabok felező pontjában, és BB, CC, α vonalak egy háromszög alakú idomot $\triangle$-t határolnak. Ha az adott P pont e $\triangle$-ban van, akkor abból 2 érintő húzható, ha ellenben a BB_2, CC_1 képezte szögek ama két csúcsszögében fekszik, melyben a $\triangle$ nincsen, akkor abból 1 érintő húzható; végre a P pontnak minden más helyzeténél abból 0 érintő húzható α-hoz, mely az ABC háromszöget a kívánt módon osztja.

Az AB, AC aszimptóták és BB_1, CC_2 érintők egy α' hiperbolát úgyszintén BC, BA, CC_2, AA_1; BC, BA, CC_1, AA_2; CA, CB, AA_2, BB_1; CA, CB, AA_1, BB_2 aszimptoták és érintők β, β', γ, γ' hiperbolákat határoznak meg, melyek mind oly tulajdonságnak, hogy a P-ből hozzájok húzott érintők az ABC-t a kívánt módon oszthatják. E hiperbolák közül a $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ párok egymást 2 valós, $\beta\gamma'$, $\gamma'\alpha'$, $\alpha\beta'$ egymást 2 képzetes pontban metszik, melyek az ABC háromszög AA', BB', CC' súlyvonalain fekszenek, és azonkívül egymást BC, CA, AB egyenesek végtelen távol fekvő pontjaiban érintik.

E hat hiperbolának csak azon hat ívét vegyük tekintetbe, melyeknek határoló pontjai az AA_1, AA_2, BB_1, BB_2, CC_1, CC_2 érintők érintőpontjai, - mert csak ezen íveken fekvő pontoknak érintői adnak helyes osztóvonalakat - és jelöljük ezen íveket akképpen, mint az egyes hiperbolákat.

Az $\alpha\beta'\gamma\alpha'\beta\gamma'$ hatoldal $\lambda < 1$ értéknél háromféle lehet, t. i., hogy az $\alpha\beta\gamma$ görbeoldalú háromszög konvex oldalú vagy konkav oldalú, vagy az ABC háromszög súlypontjává fajul el, a szerint a mint

$$\lambda \lesseqgtr \frac{4}{5}.$$

E három esetben az $\alpha\beta\gamma$ görbevonalú háromszög kerületén belül fekvő P pontokra a feladatnak 0, 6, illetve három megoldása van; magán a kerületén fekvő P pontokra 1, 5 illetve 3; annak csúcsaiban fekvő P pontokra 2, 4 illetve 3.

Mind a három esetben az $\alpha'\beta\gamma$, $\beta'\gamma\alpha$, $\gamma'\alpha\beta$ háromszögön belülfekvő pontokra a feladatnak 4 megoldása, ezeknek kerületein fekvő pontokra 3 megoldása, végre bármily más helyzetű P pontra a feladatnak 2 megoldása van.

Ha $\lambda = 1$, akkor az α, α', valamint a β β' és γ, γ' hiperbolák egyesülnek és $\alpha\beta\gamma\alpha\beta\gamma'$ hatoldal egy konkávoldalú háromoldallá fajul. E háromoldal kerületén belül fekvő P pontokra a feladatnak 3, a kerületén fekvő pontokra 2, és P-nek minden más helyzeténél csak 1 megoldása van.