Második megoldás.

Legyen az adott háromszög ABC s az adott pont P pl. a C szög szárai közt.

a) A háromszög kerületén kívül.

Ha az a oldalt $m:n$ arány szerint osztjuk belől s az osztó pont A_1, akkor:

$$AA_1B : AA_1C = m:n = BA_1 : A_1C,$$

és

$$BA_1 = r = \frac{a}{1+\lambda}, \quad \text{hol} \quad \lambda = \frac{m}{n}.$$

Legyen a P ponton átmenő azon egyenes, mely pl. a B szög szárait vágván a háromszöget a kívánt módon osztja, PE; s D meg E a c illetőleg a oldallal képezett metszéspontok.

$$BE = x, \qquad BD = y.$$

Húzzunk P ponton át az a és c oldalakkal $PQ = p$ és $PR = q$ párhuzamos vonalakat, Q a c, R az a oldal pontja lévén.

A származott háromszögek közt a következő összefüggések állanak fenn:

$$xy = cr \tag{1}$$

$$PRE \sim DBE$$

s így

$$q : y = (x+p) : x$$

azaz

$$qx - py = cr \tag{2}$$

1. és 2.-ből

$$qx^2 - crx = pcr,$$

honnan

$$x = \frac{cr}{2q} \pm \sqrt{\left(\frac{cr}{2q}\right)^2 + p\frac{cr}{q}}$$

$$x_1 = BE, \qquad X_2 = BE_1$$

mindkettő valós érték s a feladat követelményeit annyiban kielégíti, hogy mind a PE, mind a PE_1 egyenes a B szög szárain AA_1B-vel egyenlő nagyságú háromszöget vág le, de közülük csak DBE az, mely az ABC háromszög területének része lehet.

Az x_1 és x_2 értékeket következő módon szerkesztjük: A-ból QA_1-gyel párhuzamost húzván, ennek a oldallal való metszéspontja A_2 és

$$BA_2 = \frac{cr}{q}$$

$(BA_2 + p)$ fölött félkört írván le, ennek az a oldalra B pontban emelt merőlegessel való B_1 metszéspontjának BA_2 felező pontjától (O) mért távolságát O-ból jobbra-balra a oldalra forgatjuk, miáltal az E és E_1 keresett pontokhoz jutunk, mert:

$$BB_1 = \sqrt{p\frac{cr}{q}} \qquad \text{és} \qquad OB_1 = \sqrt{\left(\frac{cr}{2q}\right)^2 + p\frac{cr}{q}},$$

tehát

$$BE = \frac{BA_2}{2} + OB_1 = x,$$

$$BE_1 = \frac{BA_2}{2} - OB_1 = x_2$$

Az eljárást teljesen hasonló módon ismételjük, ha az ABC háromszöget A szög szárait metsző egyenessel akarjuk osztani.

Megeshetik, hogy vagy az A vagy a B szög szárait metsző PE egyenesek mindkét E és E_1 metszéspontja a b illetőleg a oldal megnyújtására esik. Ez esetben csak az egyik szög szárain fogunk egy AA_1B és egy AA_1C -vel egyenlő háromszöget levághatni, tehát minden esetben a P ponton át két oly egyenes húzható, mely a feladat követelményeinek teljesen megfelel. Azt, hogy az itt említett eset mikor állhat be, már előre eldönthetjük, ha P pont helyzetét vizsgáljuk. A c oldalt a lehető kétféleképpen osztván belől $m:n$ arány szerint, legyenek az osztó pontok C_1 és C_2, az első B, a másik A csúcs felé esvén. CC_1 és CC_2 vonalak a C szög szárai közt lévő területet három részre osztják. Ha P pont C_1CC_2 szög szárai közé esik, a PE vonalak egyike a, másika b oldalt fogja vágni. P a C_1CB szög szárai közé esvén a

PE osztó vonalak mindketteje A szög szárait vágja, mig ha P a C_2CA szögbe esik: az osztó vonalak mindketteje B szög szárait metszi.

Egyszerű meggondolás mutatja, hogy a tárgyalt esetben nem lehet a háromszöget C szög szárait metszőleg osztani.

b) P a háromszög kerületén belől van.

A jelöléseket és segédvonalakat megtartván, a származott háromszögekből:

$$xy = cr$$

$$q : y = (x - p) : x$$

azaz

$$qx + py = cr$$

1) és 2)-ből

$$qx^2 - crx + pcr = 0,$$

tehát

$$x = \frac{cr}{2q} \pm \sqrt{\left(\frac{cr}{2q}\right)^2 - p\frac{cr}{q}}$$

Látni való, hogy míg az előbbi esetben mindig volt két valós megoldása a feladatnak, most általában ezt nem mondhatjuk, mert a megoldás lehetősége nemcsak P pont helyzetétől, hanem az $m : n$ aránytól is függ, az egyenlet discriminansa külömbség lévén.

α) Ha

$$cr - 4pq > 0,$$

akkor mindig két, négy, esetleg hat egyenes húzható a P ponton át, melyek mindegyike a kívánt módon osztja a háromszöget, mert mind a három szög szárait metszőleg osztható két-két módon a háromszög. Minthogy

$$r = \frac{a}{1 + \lambda},$$

tehát

$$\lambda = \frac{ac - 4pq}{4pq} = \frac{n}{m}$$

az aránynak legnagyobb, illetőleg legkisebb értéke, mely mellett az osztás még lehetséges. Például a súlyponton keresztül csak oly egyenesek húzhatók, melyek a háromszöget osztván, rájuk az

$$\frac{5}{4} \geqq \lambda \geqq \frac{4}{5}$$

egyenlőtlenség áll fenn, mint az λ felírt alakjából ez esetre következik. Ugyanis ez esetben

$$p = \frac{a}{3}, \qquad q = \frac{c}{3} \qquad \text{és} \qquad 4pq = \frac{4ac}{9},$$

tehát $\lambda = \dfrac{5}{4}$ a maximum és $\lambda = \dfrac{4}{5}$ a minimum.

Az x értékeit a következő módon szerkeszthetjük: A pontból QA_1-gyel párhuzamosat húzván az a oldallal való metszéspont A_2 és így:

$$\frac{cr}{q} = BA_2$$

BA_2 fölött félkört rajzolunk, melynek az a-ra R pontban emelt merőlegessel képezett R_1 metszéspontjának B-től való távolságát a b -ben a-ra emelt merőlegesre forgatjuk s így nyert B_1 pontból a oldallal párhuzamost húzván, ennek az elébbi körrel való metszéspontjait a-ra vetítvén, a származott E_1 és E_2 pontoknak P-vel való összekötése adja az osztó egyeneseket. Ugyanis:

$$BR_1 = \sqrt{p\frac{cr}{q}} \qquad \text{és} \qquad OE = \sqrt{\left(\frac{cr}{2q}\right)^2 - p\frac{cr}{q}},$$

tehát

$$\frac{B_1A_2}{2} + OE = x_1 = BE$$

$$\frac{BA_2}{2} - OE = x_2 = BE_1$$

Míg azonban E_1 pont mindig BC közön van, E esetleg annak megnyújtására esik. Ez esetben az A szög szárain kell AA_1C-vel egyenlő háromszöget levágnunk. Ha pedig PE_1 egyenesnek c-vel való metszése c megnyújtására esik, akkor C szög szárain vágható le AA_1C-vel egyenlő háromszög, hogy a feladat követelése kielégíttessék.

$\beta)$ Ha

$$cr - 4pq = 0$$

az E és E_1 pontok BA_2 felező pontjába esnek, melynek P-vel való kapcsolata az osztó egyenes.

A szerkesztés hasonló meggondolások alapján történik, ha az A vgy a C szög szárait metszőleg akarjuk a háromszöget osztani.

Az előbbiek teljes felvilágosítást adnak arra az esetre is, ha P pont a háromszög kerületében van. Ez esetben $p = 0$ mindig és

$$x = \frac{cr}{q} = BA_2.$$

$\gamma)$ Ha

$$cr - 4pq < 0$$

egy megoldás sincsen.

Maksay Zsigmond, Pécs.