Első megoldás.

I. Bevezetés.

Hogy föntebbi feladatot megoldhassuk, néhány segédtételre van szükségünk, melyeket a következőkben levezetünk, megállapítván a bennök fellépő fogalmak értelmét.

1) Legyen adva két egyenes e_1 és e és az egyiken az QA_1, B_1 és C_1 pont, míg a másikon az A_2, B_2 és C_2 pont. Nevezzük az ugyanazon betűkkel jelzett pontokat *egymásnak megfelelőknek* és válasszunk az első egyenesen egy tetszésszerinti 4-ik X_1 pontot. A második egyenesen az X_1-nek megfelelő X_2 pontot szolgáltassa az

$$(A_1B_1C_1X_1) = (A_2B_2C_2X_2) \qquad 1)$$

relácizó, melyben

$$(ABCX) = \frac{AC}{BC} : \frac{AX}{BX}$$

Az 1) alatti egyenlet segélyével az első egyenes minden egyes pontja mellé egyértelműen rendeltük a második egyenes egy-egy pontját.

Két egyenes pontjainak végtelen sorozatait, melyeknek egyedei ily módon rendelvék egymás mellé, projektivikusoknak *nevezzük.*

2) Legyen adva két pont P_1 és P_2 és húzzunk az elsőn keresztül három egyenest a_1-et, b_1-et és c_1-et, a másodikon pedig három új egyenest a_2-et, b_2-et és c_2-t. Nevezzük az ugyanazon betűvel jelzett egyeneseket egymásnak megfelelőknek és válasszunk egy tetszésszerinti a P_1-en keresztülmenő egyenest x_1-et. A P_2 ponton keresztülmenő és az x_1-nek megfelelő x_2 egyenest szolgáltassa az

$$(a_1b_1c_1x_1) = (a_2b_2c_2x_2) \qquad 2)$$

reláczió, hol

$$(abcx) = \frac{\sin(ac)}{\sin(bc)} : \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)}$$

A 2) alatti egyenlet segélyével az első sugársor minden egyes sugarát egyértelműen rendeltük a második sugársor egy-egy sugara mellé.

Két ily sugársort szintén projektvikusnak fogunk nevezni.

3) *Ha végre*

$$(ABCX) = (abcx) \qquad 3)$$

az illető pont- és sugársort szintén projektivikusnak mondjuk.

I. *Tantétel.* Ha két projektivikus pontsor pontjai közül az $A_1, B_1, \ldots, X_1$-et összekötjük valamely P_1, és az $A_2, B_2, \ldots, X_2$-t valamely P_2 ponttal a nyert sugársorok szintén projektivikusak, vagyis az

$$(A_1B_1C_1X_1) = (A_2B_2C_2X_2)$$

relációból folyik az

$$(a_1b_1c_1x_1) = (a_2b_2c_2x_2)$$

reláczió.

A $P_1A_1C_1$, $P_1B_1C_1$, $P_1A_1X_1$ háromszögek tekintetbe vételéből következik, hogy

$$(A_1B_1C_1X_1) = (a_1b_1c_1x_1),$$

mert mind a négy ugyanazon magasságú lévén, a területeikből képezhető k e t t ő s - v i s z o n y

$$\frac{t_1}{t_2} : \frac{t_3}{t_4} = \frac{A_1C_1}{B_1C_1} : \frac{A_1X_1}{B_1X_1}$$

míg másrészt

$$(t_1t_2t_3t_4) = \frac{P_1A_1 \cdot P_1C_1 \sin(a_1c_1)}{P_1B_1 \cdot P_1C_1 \sin(b_1c_1)} : \frac{P_1A_1 \cdot P_1X_1 \sin(a_1x_1)}{P_1B_1 \cdot P_1X_1 \sin(b_1x_1)} - (a_1b_1c_1x_1).$$

Hasonlóképpen bizonyítható, hogy

$$(A_2B_2C_2X_2) = (a_2b_2c_2x_2)$$

és így első tantételünk igazolva van.

Ha az a_1 és a_2 metszéspontját A-val s. í. t. jeleljük, az $A, B, \ldots$ pontok általánosságban nem feküsznek egy egyenesben és a $P_1P_2 = p_1$ egyenesnek nem felel meg a második sugársor $P_2P_1 = q_2$ egyenese.

II. *Tantétel.* Ha A, B, ... stb. egy e egyenesben feküsznek a $P_1P_2 = p_1$ sugárnak a $P_2P_1 = p_2$ sugár felel meg és megfordítva, ha P_1P_2-nek P_2P_1 felel meg, az A, B, ... stb pontok egy egyenesben feküsznek. Két ilyen sugársort ***perspektivikus helyzetűnek*** mondunk.

Legyen a p_1 és az e metszéspontja P; ekkor

$$(PABX) = (p_1a_1b_1x_1)$$

és csak akkor lehet

$$(p_2a_2b_2x_2) = (p_1a_1b_1x_1)$$

ha p_2 is P-n megy keresztül, vagyis, ha

$$p_1 \equiv p_2$$

Megfordítva, ha $p_1 \equiv p_2$, akkor

$$(p_1a_1b_1x_1) = (p_2a_2b_2x_2)$$

reláczió csak úgy állhat fenn, ha X a PAB egyenesbe esik. Mert ha az x_1 és x_2 egyenesek az e-t X_1 és X_2 pontokban metszenék, a $(p_1a_1b_1x_1) = (p_2a_2b_2x_2)$-ből, a

$$(PABX_1) = (PABX_2)$$

reláczió következnék, mely csak akkor állhat fenn, ha $X_1 = X_2 = X$.

III. *Tantétel.* Ha egy *kör* két pontját, P_1-et és P_2-t, rendre összekötjük többi pontjaival A, B, ..., X-szel, két projektivikus pontsort nyerünk.

A projektivitást jellemző egyenlet

$$(a_1b_1c_1x_1) = (a_2b_2c_2x_2)$$

helyessége ekkor az

$$(y_1z_1) \textit{ és } (y_2z_2)$$

szögeknek, mint ugyanazon YZ ív felett álló kerületi szögeknek egyenlőségéből következik.

Feladat. Legyen adva két sugársor, melynek csúcspontjai P_1 és P_2 összeesnek a nélkül, hogy a két sugársor azonossá válnék. Keressük az x_1-nek megfelelő x_2-t.

E czélból rajzoljunk tetszésszerinti a $P_1 = P_2 = P$ ponton keresztülmenő kört. Ennek metszéspontjait az a_1b_1, ,... stb. sugarakkal nevezzük A_1B_1, ,... stb.-nek, míg az a_2b_2, ,... stb. sugarakkal A_2B_2, ,... stb.-nek. Kössük össze az A_1 pontot A_2, B_2 és C_2 pontokkal és az A_2-t A_1, B_1 és C_1 pontokkal. A nyert sugársorok legyenek a', b', c', ... stb., és a'', b'', c'', ... stb.

Ekkor a III. Tantétel alapján

$$(a_1b_1c_1x_1) = (2a_2b_2c_2x_2)$$

továbbá

$$(a'b'c'x') = (a_2b_2c_2x_2)$$

és

$$(a''b''c''x'') = (a_1b_1c_1x_1)$$

s így tehát

$$(a'b'c'x') = (a''b''c''x'')$$

De minthogy

$$a' \equiv a''$$

a II. Tantétel alapján az a', b', c', ... stb. és a'', b'', c'', ..., stb. sugársorok perspektivikus helyzetűek, azaz $a'a'' = A, b'b'' = B$ stb. pontok egy egyenesbe az e tengelybe esnek. Ennek segélyével a tetszésszerint $PX_1 = x_1$ sugárhoz a megfelelő x_2-t a következő módon találhatjuk meg:

Összekötjük $A_2 - t$ X_1-gyel; az így nyert x'' és az e metszéspontjának X-nek és A_1-nek összekötő egyenese a kört X_2-ben metszi. A $PX_2 = x_2$ a keresett sugár.

Ha az e tengely a kört metszi, az adott sugársorokban két-két sugár van, mely a megfelelőjével összeesik; ezek a P-ből a metszéspontokon keresztül húzott sugarak, melyeket még a két sugársor ***kettős sugarainak*** is nevezünk.

II.

Az adott feladatot két részre bontjuk. Először módot keresünk mindazon egyenesek feltalálására, melyek az adott háromszöget az $m : n$ viszony szerint osztják, másodszor pedig ezek közül kiválasztani igyekezünk mindazokat, melyek a P ponton mennek keresztül.

Rögtön szembetűnik, hogy az első feltételnek megfelelő egyenesek három csoportra oszlanak a szerint, a mint az A, B vagy C szög szárain metszik le a háromszöget, melynek területe t az ABC háromszög területéhez T-hez az $m:(m+n)$ viszony szerint aránylik. Elegendő lesz egyelőre egy csoportot figyelemmel kísérni.

Jeleljék B_1, B_2, $B_3, \dots$ stb. C_1, C_2, $C_3, \dots$ stb. az első feltételnek megfelelő egyenesek metszéspontjait a CA és AB egyenesekkel. Ekkor

$$C_kAB_k : CAB = m : (m+n)$$

vagyis

$$C_kAB_k = \frac{Tm}{m+n} = k.$$

Tehát

$$AB_1 \cdot AC_1 = AB_2 \cdot AC_2 = \ldots = \frac{k}{\sin A} = K$$

Továbbá az

$$AB_1 = \frac{K}{AC_1}, \qquad AB_3 = \frac{K}{AC_3}$$

egyenlőségekből

$$AB_3 - AB_1 = \frac{K(AC_3 - AC_1)}{AC_1 \cdot AC_3}$$

$$B_1B_3 = \frac{K \cdot C_1C_3}{AC_1 \cdot AC_3}$$

$$B_2B_3 = \frac{K \cdot C_2C_3}{AC_2 \cdot AC_3}$$

$$B_1B_k = \frac{K \cdot C_1C_k}{AC_1 \cdot AC_k}$$

$$B_2B_k = \frac{K \cdot C_2C_k}{AC_2 \cdot AC_k}$$

s így

$$\frac{B_1B_3}{B_2B_3} : \frac{B_1B_k}{B_2B_k} = \frac{K \cdot C_1C_3}{AC_1 \cdot AC_3} \cdot \frac{AC_2 \cdot AC_3}{K \cdot C_2C_3} : \frac{K \cdot C_1C_k}{AC_1 \cdot AC_k} \cdot \frac{AC_2 \cdot AC_k}{K \cdot C_2C_k} =$$
$$= \frac{C_1C_3}{C_2C_3} : \frac{C_1C_k}{C_2C_k}$$

vagyis

$$(B_1B_2B_3B_k) = (C_1C_2C_3C_k)$$

miáltal kitűnik, hogy a B_k és C_k pontsorok projektivikusak.

Ha a P pontot rendre összekötöm a B_k és C_k pontokkal két, közös csúcspontú projektivikus sugársort kapok, melyeknek egy-egy összetartozó párja b_k és c_k a CA illetőleg AB egyenest B_k és C_k pontokban metszi. Ezen sugársorok kettős sugarai az AB és CA egyeneseket egymásnak megfelelő pontokban vágják, tehát a feladat első részében jellemzett egyenesek közé tartoznak, másrészt mint a sugársorok elemei a P ponton is keresztül mennek, tehát a feladat követelményeit kielégítő egyenesek.

Most tehát már csak az van hátra, hogy a B_k és C_k sorozatokból három megfelelő pontpárt találjunk.

Jelelje D_b az AC egyenes azon pontját, mely kielégíti az

$$AD_b : D_bC = m : n$$

relácziót; rajzoljunk továbbá az AC oldal mint átmérő felett félkört és emeljünk az AD-re D_b-ben merőlegest, míg az a félkört B_1^* pontban metszi és vigyük az AC-re A ponttól a C irányában $AB_1 = AB_1^*$ távolságot. B_1-ből párhuzamosat húzva BC-vel, e párhuzamos és az AB metszéspontja legyen D_1. Ekkor B_1 és C_1 egy-egy a B_k és C_k sorozatokba tartozó pont.

Ugyanis egyrészt

$$AB_1 + \sqrt{AD_bAC} = \sqrt{m(m+n)}$$

másrészt

$$AB_1C_1\Delta : ABC\Delta = AB^2 : AC^2$$
$$= AD_bAC : AC^2 =$$
$$= AD_b : AC = m : (m+n)$$

amivel azután állításunk igazolva van.

Megfelelő pontok továbbá $B_2 = A$ és $C_2 = V_c$, hol V_c az AB egyenesnek végtelen távol lévő pontját jelenti. Hasonlóképpen $B_3 = V_b$ és $C_3 = A$, mert az

$$AB_k AC_k = K$$

reláczióból következik, hogy ha $AB_k = 0$, akkor $AC_k = \infty$ és megfordítva. A projektivikus sugársorok három-három egymásnak megfelelő egyenesei tehát

$$\begin{array}{ccc} PB_1 & \text{és} & PC_1 \\ PA & \text{és} & PV_c \parallel AB, \\ PV_b \parallel AC & \text{és} & PA. \end{array}$$

Minden szögön tehát *legfeljebb* két módon lehet levágni oly háromszöget, mely az adottal $m : (m+n)$ arányban van, de ezek közül csak azok jöhetnek tekintetbe, melyek egész terjedelmökben az adott háromszög belsejébe esnek.

A.D.

Jegyzet. Felkérjük olvasóinkat, a feladat szerkesztését fentebbiek alapján eszközölni és nekünk a rajzot beküldeni.

Szerk.