A háromszög alapéle

$$b = 2a \sin \frac{\alpha}{2} \tag{1)}$$

és így az alaplap területe

$$T = a^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sqrt{3} \tag{2)}$$

míg a térfogat

$$V = T \frac{h}{3}$$

hol h a pyramis magassága.

De

$$h = \sqrt{a^2 - R^2}$$

hol R az alap köré írt háromszög sugara.

$$R = \frac{b}{2 \sin 60^\circ} = \frac{b}{\sqrt{3}}$$

$$R = \frac{2a \sin \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}$$

és így

$$h = a \sqrt{\frac{3 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{3}}$$

Tehát

$$3V = a^3 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sqrt{3 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \tag{3)}$$

Minthogy V-vel V^2 is maximum, keressük ez utóbbinak értékét.

$$9V^2 = a^6 \sin^4 \frac{\alpha}{2} \left(3 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right)$$

vagy az α' értéknél

$$9V'^2 = a^6 \sin^4 \frac{\alpha'}{2} (3 - 4 \sin^2 \frac{\alpha'}{2} \Big)$$

tehát

$$\frac{1}{\alpha^6}(9V^2 - 9V'^2) = 3 \left(\sin^4 \frac{\alpha}{2} - \sin^4 \frac{\alpha'}{2} \right) - 4 \left(\sin^6 \frac{\alpha}{2} - \sin^6 \frac{\alpha'}{2} \right) =$$

$$= 3 \left(\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha'}{2} \right) \left(\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha'}{2} \right) - 4 \left(\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha'}{2} \right) \left(\sin^4 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \frac{\alpha'}{2} + \sin^4 \frac{\alpha'}{2} \right).$$

Ezt elosztva $(\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha'}{2} \Big)$-tel és $\alpha = \alpha'$-et téve, lesz

$$6 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - 12 \sin^4 \frac{\alpha}{2} = 0^1$$

miből

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = 0 \quad \text{vagy} \quad 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 0.$$

Az első egyenletből $\alpha = 0$, mi nyilván minimumnak felel meg, míg a másodikból

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

vagyis

$$\frac{\alpha}{2} = 45^\circ \; \alpha = 90^\circ$$

Ekkor

$$V_{max} = \frac{a^3}{6}$$

azaz akkor, ha $\alpha = 90^\circ$, vagyis derékszög.

Meitner Elemér, V. ker. főreálisk. VIII. B. o. t., Budapest.