Oldassék meg a következő egyenletrendszer:

$$\frac{x+y}{1-xy}=1 \tag{1)}$$

$$\frac{(1-x^2)(1-y^2)+4xy}{(1+x^2)(1+y^2)}=\frac{1}{2} \tag{2)}$$

A 2) alatti egyenlet még a következő alakban írható:

$$\frac{(1+x-y-xy)(1-x+y-xy)+4xy}{1+x^2+y^2+x^2y^2}=\frac{1}{2}$$

s ennek számlálójába az 1)-ből $1-xy$ értéke behelyettesíthető, mi által a következő alakot nyeri:

$$16xy=1+x^2+y^2+x^2y^2 \tag{3)}$$

Ha most ebbe x^2+y^2 értékét belehelyettesítjük az 1)-ből, a következő egyenletet kapjuk:

$$x^2y^2-10xy+1=0. \tag{4)}$$

Ebből

$$x_1y_1=5+2\sqrt{6},\quad x_2y_2=5-2\sqrt{6} \tag{5)}$$

és ezen értékeket az 1)-be helyettesítve

$$x_1+y_1=-4-2\sqrt{6},\quad x_2+y_2=-4+2\sqrt{6}, \tag{6)}$$

Az 5) és 6) alatti egyenletekből következik, hogy x_1 és y_1, illetőleg x_2 és y_2 a következő másodfokú egyenletek gyökei

$$z^2+(4-2\sqrt{6})z+(5+\sqrt{6})=0 \tag{7)}$$

$$u^2+(4-2\sqrt{6})u+(5-\sqrt{6})=0 \tag{8)}$$

melyekből

$$x_1=-2-\sqrt{6}+\sqrt{5+2\sqrt{6}}$$

$$y_1=-2-\sqrt{6}-\sqrt{5+2\sqrt{6}}$$

$$x_2=-2+\sqrt{6}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}$$

$$y_2=-2+\sqrt{6}-\sqrt{5-2\sqrt{6}}$$

J e g y z e t. $\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$ és $\sqrt{5-2\sqrt{6}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$, mint arról négyzetre-emelés által közvetlenül meggyőződhetünk. Így tehát z és u értékei még a következő alakban is írhatók:

$$z=\pm(\sqrt{2}+\sqrt{3})(1\mp\sqrt{2}),$$

és

$$u=\pm(\sqrt{2}-\sqrt{3})(1\mp\sqrt{2}).$$

Szerk.

Prónai Győző, főgymn. VIII.o. tanuló, Beszterczebánya.)

A feladatot még megoldották: Grossmann Gusztáv, ág.ev. főgymn. VIII. o. t., Budapest; Heymann Tivadar, főreálisk. VIII. o. t., Győr; Meitner Elemér, V. ker. főreálisk. VIII. B.o.t.Budapest; Weisz Lipót, főreálisk. VI. o. t. Pécs.