$$x+y-z=2a \tag*{1)}$$
$$x^2+y^2=z^2 \tag*{2)}$$
$$m(x+y)=xy \tag*{3)}$$

Mily feltételek mellett lesznek az egyenletrendszer gyökei pozitívek?

Az 1) és 3)-ból a következő új egyenletek folynak

$$x+y=2a+z \tag*{4)}$$
$$xy=m(2a+z) \tag*{5)}$$

vagyis az x és y a következő másodfokú egyenlet gyökei

$$u^2-(2a+z)u+m(2a+z)=0 \tag*{6)}$$

melyből

$$u=\frac{1}{2}(2a+z\pm\sqrt{(2a+z)^2-4m(2a+z)}\Big)$$

de a 2) egyenlet még a következőképpen is írható

$$(x+y)^2-2xy-z^2=0$$
$$(2a+z)^2-2m(2a+z)-z^2=0$$
$$(4a-2m)z+4a^2-4ma=0$$
$$z=\frac{2a(m-a)}{2a-m} \tag*{7)}$$

Ezen értékét z-nek az u kifejezésébe helyettesítve, az a következő alakot nyeri

$$u=\frac{1}{2}\left(\frac{2a^2}{2a-m}\pm\sqrt{\frac{2a^2}{2a-m}\left(\frac{2a^2}{2a-m}-4m\right)}\right)$$

$$u=\frac{a^2\pm 2a^2\sqrt{a^2-4am+2m^2}}{2a-m}$$

Hogy u valós legyen, kell, hogy:

$$2m^2-4am+a^2\geq 0$$

vagy

$$2\left(\frac{m}{a}\right)^2-4\left(\frac{m}{a}\right)+1\geq 0$$

$$2\left(\frac{m}{a}-\frac{1}{2}(2+\sqrt{2})\right)\left(\frac{m}{a}-\frac{1}{2}(2-\sqrt{2})\right)\geq 0$$

a mi akkor áll be, ha

$$\frac{m}{a}\leq\frac{1}{2}(2-\sqrt{2}) \text{ vagy } \frac{m}{a}\geq\frac{1}{2}(2+\sqrt{2}) \tag*{8)}$$

Hogy u mindkét értéke positív legyen, kell, hogy összegük és szorzatuk egyidőben positív legyen, vagyis a 6)-ból

$$2a+z>0 \text{ és } m(2a+z)>0$$

$$\frac{2a^2}{2a-m}>0 \text{ és } \frac{2a^2m}{2a-m}>0$$

mely feltételek akkor vannak kielégítve, ha

$$2a-m>0,\quad m>0,\quad a>0$$

azaz

$$0<m<2a.$$

De minthogy ugyanakkor, hogy z is positív legyen, a 7)-ből

$$a<m<2a$$

a 8) alatti egyenlőtlenségekből csak a második lehet kielégítve, vagyis a végleges feltétel:

$$\frac{a}{2}(2+\sqrt{2})\leq m\leq 2a,\quad a>0.$$