Az $OMN$ háromszög súlypontját nyerem, ha az $N$ és $M$ pontokat összekötöm az $OM$ és $ON$ egyenesek felezési pontjaival $N'$ és $M'$-tel. Az $NN'$ és $MM'$ egyenesek metszéspontja $G$ a keresett súlypont. Fel kell tehát írnom ezen utóbbi egyenesek egyenleteit. E végből ismernem kell az $N'$ és $M'$ pontok koordinátáit. De ezek a következők:

$$N'\Big(\frac{0+10}{2}, \frac{0+0}{2}\Big) = N'(5,0),$$

$$M'\Big(\frac{0+6}{2}, \frac{0+8}{2}\Big) = M'(3,4).$$

Ennélfogva az $NN'$ és $MM'$ egyenesek egyenletei:

$$NN' \ldots y - 0 = \frac{0-8}{5-6}(x-5)$$

$$y = 8(x-5)$$

$$y - 8x + 40 = 0 \qquad 1)$$

$$MM' \ldots y - 0 = \frac{0-4}{10-3}(x-10)$$

$$7y = -4x + 40$$

$$7y + 4x - 40 = 0 \qquad 2)$$

Az 1) és 2) egyenletekből kiszámíthatók a $G$ pont koordinátáinak mérőszámai.

$$G\Big(\frac{16}{3}, \frac{8}{3}\Big).$$

A három magasságvonal átmenési pontját $H$-t megkapom, ha az $N$ és $M$ pontokból a szemben fekvő egyenesekre merőlegeseket húzunk és e merőlegesek metszéspontját felkeressük. Az $OM$ és $ON$ egyenesek egyenletei azonban a következők:

$$OM \ldots y = 0,$$

$$ON \ldots 6y - 8x = 0$$

Tehát a reájuk merőleges $NN''$ és $MM''$ egyenesek egyenletei:

$$NN'' \ldots x = 6$$

$$MM'' \ldots 8y + 6x - 60 = 0$$

és így a $H$ pont koordinátái: $H(6,3)$.

Végre a háromszög körül írható kör középpontját $C$-t megkapom, ha az $N'$ és $M'$ pontokban az $OM$ és $ON$ egyenesekre merőlegeseket emelek és ez egyenesek metszéspontjait felkeresem. De az $N'C$ és $M'C$ egyenesek egyenletei a következők:

$$NC \ldots x = 5$$

$$MC \ldots 8y + 6x - 50 = 0$$

és így a $C$ pont koordinátái:

$$C\big(5, \frac{5}{2}\big)$$

Ha három pont koordinátáit általánosságban $x_k$ és $y_k$-val jeleljük, hol $k = 1, 2, 3$-mal, annak feltételét, hogy a három pont egy egyenesben fekszik, a következő egyenlet fejezi ki:

$$x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_2 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) = 0$$

Tehát a jelen esetben:

$$\frac{16}{3}\left(3 - \frac{5}{2}\right) + 6\left(\frac{5}{2} - \frac{8}{3}\right) = 0$$

$$16 + 15 + \frac{40}{3} - 16 - 15 = 0$$

Ez utóbbi egyenlet szemmel láthatólag identitás.

Hogy végre $CH = 3CG$-vel azt közvetlenül bebizonyíthatom, ha felírom $CH$ és $CG$ értékeit a $C, G$ és $H$ pontok koordinátáinak segélyével; ekkor ugyanis:

$$CH^2 = (5-6)^2 + \left(\frac{5}{2} - 3\right)^2 = \frac{5}{4}$$

és

$$CG^2 = \left(5 - \frac{16}{3}\right)^2 + \left(\frac{5}{2} - \frac{8}{3}^2\right) = \frac{1}{9} + \frac{1}{36} = \frac{5}{36}$$

Tehát

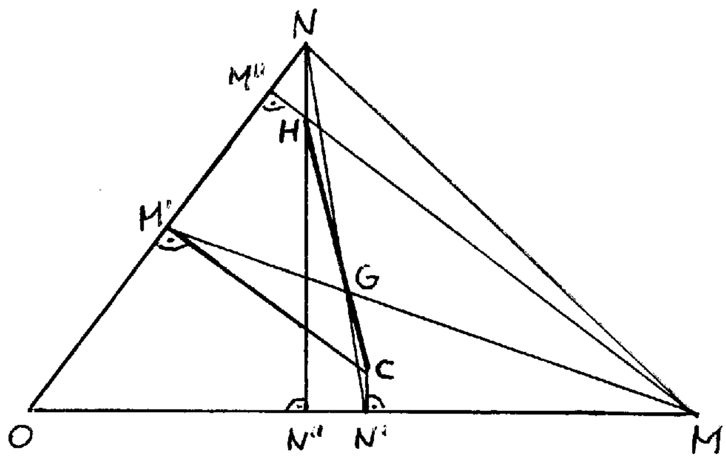
$$CH^2 = 9CG^2,$$

és

$$CH = 3CG.$$

A mi bebizonyítandó volt.

(Jorga Gergely, főreálisk. VIII. oszt. tanuló, Arad)




*10. ábra*

**Jegyzet.** Hogy a $CGH$ pontok egy egyenesben feküsznek és a $CH = 3CG$-vel, az a 10. ábrából a planimetria tételeivel is egyszerűen kimutatható.

Kösszük össze az $M'$ és $N'$ pontokat egy egyenessel. A $GN'M'$ és $HNM$ háromszögek hasonlóságából következik, hogy:

$$\frac{CN'}{NH} = \frac{N'M'}{MN} = \frac{1}{2} \tag{1)}$$

Nevezzük a $CH$ és $NN'$ egyenesek metszéspontját $G'$-nek, akkor a $CG'H$ és $HG'N$ háromszögek hasonlóságából következik, hogy:

$$\frac{CG'}{HG'} = \frac{N'G'}{NG'} = \frac{CN'}{HN} = \frac{1}{2} \tag{2)}$$

De a háromszög súlypontja $G$ az $NN'$ és $MM'$ egyenesek metszéspontja és a $GN'M'$ és $GNM$ háromszögek hasonlóságából következik, hogy

$$\frac{N'G}{NG} = \frac{M'G}{MG} = \frac{N'M'}{NM} = \frac{1}{2} \tag{3)}$$

A 2) és 3) egyenlet összehasonlításából folyik, hogy

$$\frac{N'G'}{NG'} = \frac{N'G}{NG},$$

azaz a $G'$ és $G$ pontok azonosak, vagyis a $CGH$ pontok egy egyenesben feküsznek; továbbá a 2)-ből $2CG = HG$, $\quad 3CG = HG + CG = CH$, vagyis a $CH$ a $CG$ háromszorosa.