Kerestessék az

$$y = \frac{x^2+1}{x^2+4x+3} \qquad \text{és} \qquad y = \frac{x^2-2x+1}{2x^2+2x+1}$$

függvények maximuma és minimuma.

Első megoldás.

Írjuk az első egyenletet x-nek fogyó hatványai szerint rendezett alakjában:

$$(1-y)x^2 - 4yx + (1-3y) = 0$$

Ezen egyenlet gyökei akkor valósak, ha

$$y^2 - 4y - 1 \geqq 0$$

vagyis ha

$$[y-(2+\sqrt{5})][y-(2-\sqrt{5})] \geqq 0$$

Ez akkor következik be, ha

$$y \geqq (2+\sqrt{5}) \geqq (2-\sqrt{5})$$

vagy ha

$$y \leqq (2-\sqrt{5}) \leqq (2+\sqrt{5})$$

Az y megengedhető értékeinek sorozataiban $y' = 2-\sqrt{5}$ felső határ, azaz maximum és $y'' = 2+\sqrt{5}$ alsó határ, vagyis minimum

Második megoldás.

Legyen x_1 és x_2 az x-nek két értéke, melynél y ugyanazon értékekekt veszi fel; vagyis a második függvény esetére

$$\frac{x_1^2-2x_1+1}{2x_1^2+2x_1+1} = \frac{x_2^2-2x_2-1}{2x_2^2+2x_2+1}$$

$$2x_1^2x_2^2 + 2x_1^2x_2 + x_1^2 - 4x_1x_2^2 - 4x_1x_2 - 2x_1 + 2x_2^2 + 2x_2 + 1 =$$
$$= 2x_2^2x_1^2 + 2x_2^2x_1 + x_2^2 - 4x_2x_1^2 - 4x_2x_1 - 2x_2 + 2x_1^2 + 2x_1 + 1;$$
$$2x_1x_2(x_1-x_2) + (x_1+x_2)(x_1-x_2) - 2(x_1-x_2) + 4x_1x_2(x_1-x_2) -$$
$$-2(x_1+x_2)(x_1-x_2) - 2(x_1-x_2) = 0$$
$$6x_1x_2 - (x_1+x_2) - 4 = 0$$

Ha most

$$x_1 = x_2 = x,$$

akkor

$$6x^2 - 2x - 4 = 0$$

miből

$$x = \begin{cases} = 1 \\ = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

y-nak megfelelő értékei

$$y_{min} = 0$$
$$y_{max} = 5$$

(Visnya Aladár, fr. VII. o. t. Pécs.)