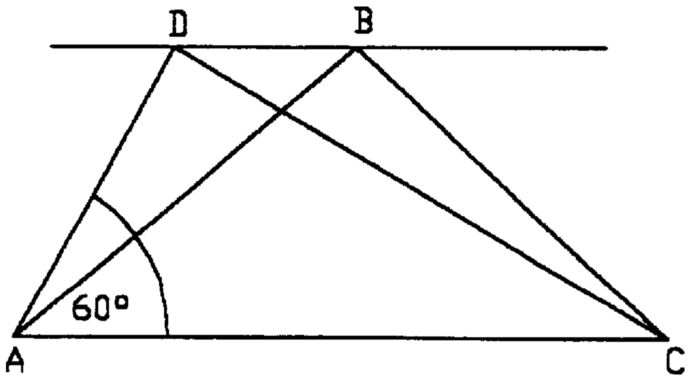
Legyen ABC az adott háromszög. (7. ábra)



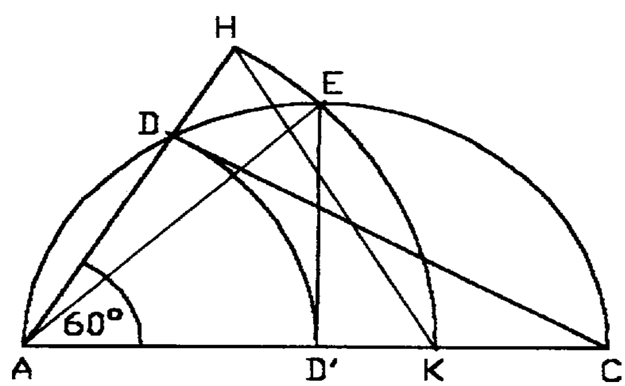
7. ábra

Alakítsuk át e háromszöget egy másikká, mely az adottal egyenlő területű és melynek egyik szöge 60°. Ezen czélból vonjunk a B pontból párhuzamosat az AC-vel és az A pontból egy egyenest, mely az AC-vel 60°-nyi szöget alkot. Legyen D a két egyenes metszéspontja. Az ADC háromszög egyenlő területű az ABC háromszöggel, mert alapjaik és magasságaik ugyanakkorák.

Alakítsuk át a most nyert háromszöget egyenoldalúvá. Ezen czélból az AD oldalon egy H és az AC oldalon egy K pontot oly módon kell meghatároznunk, hogy 1°.$AH = AK = l$, 2°. hogy $AHK = ADC$. De minthogy a két háromszögnek A pontban közös szögük van, következik, hogy:

$$l^2 = AC \cdot AD \qquad 1)$$

Hogy l-et megszerkeszthessük, vigyük rá AD hosszúságot AD'-ben AC-re, rajzoljunk AC mint átmérő fölött félkört és emeljünk AC-re a D' pontban merőlegest, mely e félkört E pontban metszi és húzzuk meg az AE húrt. Ezen húr mértani középarányosa lévén az AC és AD hosszaknak az 1) értelmében egyenlő l-lel. Ha tehát az A-ból mint középpontból AE sugárral kört írunk le, ez az AD és AC egyeneseket a keresett H és K pontokban fogja metszeni. (8. ábra)



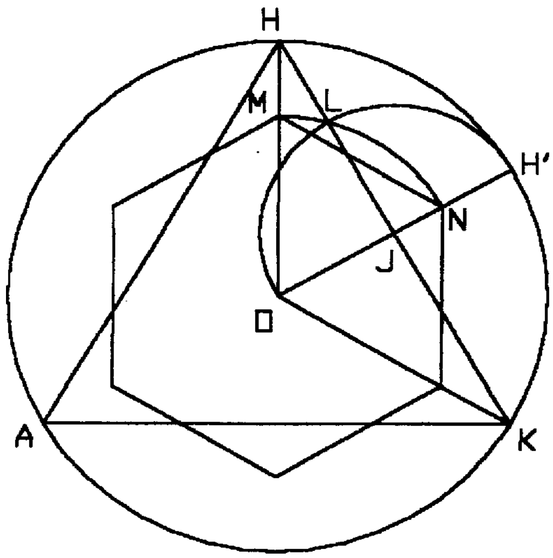
8. ábra

Alakítsuk át a nyert egyenoldalú háromszöget vele egyenlő területű szabályos hatszöggé.

Rajzoljunk ezen czélból az AHK háromszög körül kört és húzzuk meg az OH és OK küllőket. Emeljünk továbbá az O pontból a HK-ra merőlegest, mely a HK-t J és a kört H' pontban metszi. J a HK egyenes felezési pontja. Az AHK háromszög 6, az OHJ háromszöggel egybevágó háromszög összegével egyenlő. Az OJH háromszöget most a következőképpen alakítom át egyenoldalú háromszöggé: Rajzolok az $OH' = OH$ sugár fölött mint átmérő fölött félkört. Ezt az J pontban, az OH'-ra merőleges HK egyenes L pontban metszi, s így tehát

$$\overline{OL}^2 = OJ \cdot OH' = OJ \cdot OH.$$

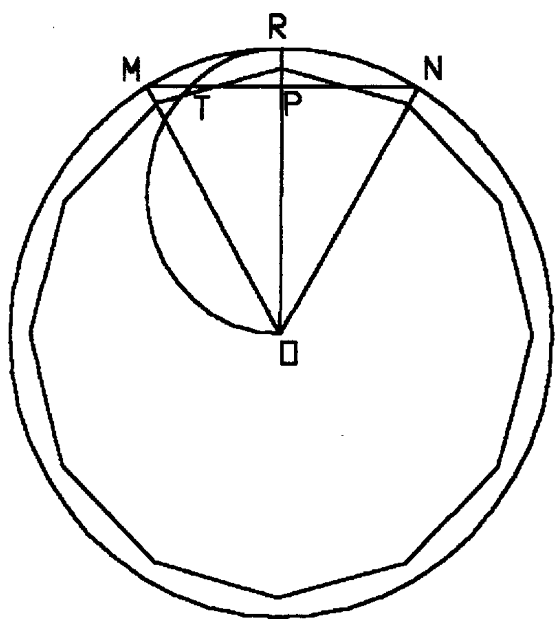
Ha most az OL sugárral az O pontból, mint középpontból kört írunk le ez az OJ és OH egyeneseket N és M pontokban metszi, melyekre nézve $ON = OM$ és $ON \cdot OM = OJ \cdot OH$. Vagyis az ONM *egyenlőszárú* háromszög területe egyenlő az OJH háromszög területével. De az OMN háromszög egyenlőoldalú, mert a HOJ szög 60°-nyi. Az OL sugárral rajzolt körbe írt szabályos hatszög területe egyenlő tehát az $AHK = ADC = ABC$ háromszög területével. (9. ábra.)



9. ábra

Végül az $MN\ldots$ szabályos hatszöget vele egyenlő területű tizenkétszöggé kell átalakítanunk.

Emeljünk e végből az MN oldalra az O-ból merőlegeset, mely az MN-t P-ben és az $MN\ldots$ hatszög körül írt kört R-ben metszi. Az ONM háromszög ezáltal az OPM és OPN háromszögekre oszlik, melyek egymással egyenlők és melyekben az O-nál lévő szögek $30°$-nyiak. Az OR mint átmérő fölött alakított félkör az $MP \perp OR$ egyenest oly T pontban metszi, hogy az OT küllővel az O pontból, mint középpontból leírt körbe rajzolt szabályos 12 szög egyenlő területű az $MN\ldots$ szabályos 12 szög egyenlő területű az $MN\ldots$ szabályos hatszöggel és így az ABC háromszöggel is.



9.a. ábra