Harmadik megoldás)*

Jelöljük az ABC háromszög BC, CA, AB oldalait a, b, c-vel az egymást *kizárólag* egy E pontban érintő és az AC egyenest az A pontban, a BC egyenest a B pontban érintő két körnek sugarát r, illetve r_1-gyel; CE egyenes második metszőpontját e körökkel P, P_1-gyel, végre DE vonaldarabot e-vel.

Ha a P, P_1 pontok közül a P fekszik CE vonaldarabon akkor a C pont hatványa a két kört illetőleg

$$CE \cdot CP = CE \cdot (CE - PE) = CA^2,$$

$$CE \cdot CP_1 = CE \cdot (CE + EP_1) = CB^2,$$

mely egyenletekből

$$PE = \frac{CE^2 - CA^2}{CE} = \frac{e^2 - b^2}{e};\ EP_1 = \frac{CB^2 - CE^2}{CE} = \frac{a^2 - e^2}{e}.$$

Tekintve, hogy E a köröknek belső hasonlósági pontja, továbbá a körök sugarára vonatkozó feltételt:

$$PE : EP_1 = r : r_1 = m : n.$$

Ha ebbe az arányba PE, EP_1-nek előbb talált értékeit helyettesítjük, és abból e^2 értékét kiszámítjuk:

$$e^2 = \frac{a^2m + b^2n}{m+n} = \frac{a^2 + \lambda b^2}{1+\lambda}$$

hol $\lambda = n : m$.

Minthogy e-nek értéke csak az a, b és λ mennyiségektől függ, melyek állandóak, azért az egymást kizárólag érintő keresett körpárok érintőpontja egy körön fekszik, melynek középpontja C és sugara e.

Ha a szerkesztendő körpárok egymást *bezárólag* érintik egy E' pontban és $CE' = e'$, akkor hasonló úton mint előbb kiszámíthatjuk e'-nek értékét, mely

$$e'^2 = \pm\frac{a^2m + b^2n}{m-n} = \pm\frac{a^2 - \lambda b^2}{1-\lambda}$$

[1]

Szintén mondhatjuk, hogy a keresett és egymást bezárólag érintő körpárok érintő-pontja a C pontból leírható körön fekszik, melynek sugara e'.

A mi az e és e' sugarak szerkesztését illeti következőképp járhatunk el:

Az A és D[2] pontokon keresztül C szög felezőjével párhuzamosan menő egyeneseket metszéshez hozzuk CB-vel G, H pontokban; GB átmérő fölé írt körnek bármelyik metszőpontja I, a GB-re H-ban merőlegesen álló egyenessel, már C ponttól e távolságra van. Ha továbbá az A és D*) ponton keresztül C szög külszögének felezőjével párhuzamosan menő egyenesek CB-t G', H' pontokban metszik és GB átmérő fölé írt körhöz H'-ből vont érintő pontja I', akkor CH' átfogó és BI' befogóból alkotott derékszögű háromszög másik befogója e'.

Ugyanis:

$$GH : HB = m : n, \quad GH + HB = a + b$$

$$GH = \frac{(a+b)m}{m+n}, \quad HB = \frac{(a+b)n}{m+n}, \quad CH = CB - HB = \frac{am - bn}{m+n},$$

$$CI^2 = CH^2 + HI^2 = CH^2 + GH \cdot HB = \frac{a^2m + b^2n}{m+n}e^2.$$

Továbbá:

$$G'H' : BH' = m : n, \quad G'H' - BH' = a - b$$

$$G'H' = \frac{(a-b)m}{m-n}, \quad BH' = \frac{(a-b)n}{m-n}, \quad CH' = CB + BH' = \frac{am - bn}{m-n},$$

$$CH'^2 - H'I'^2 = CH'^2 - G'H' \cdot BH' = \frac{a^2m - b^2n}{m-n} = e'^2.$$

J e g y z e t. 1. A midőn A, B, C pontok egy egyenesben fekszenek, AB átmérő fölé kört írunk és ehhez D'-ből érintőt húzunk, vagy D pontban AB-re merőlegest emelünk; az érintő érintőpontja, vagy a merőleges metszőpontja a körrel, a körpárok érintőpontja. 2. A midőn C végtelen távol van tehát $CA \parallel CB$, a keresett körpárok érintőpontja D és D'. A feladatnak ebben az esetekben csak két megoldása van.

A feladat második megoldásánál (a 19. lapon) már ki lett mutatva, hogy ha a D, D' pontok az AB vonaldarabot akkép osztják, hogy

---

[1] *)Lásd a 19 oldalt.

[2] *)AD:DB=m:n és
AD':D'B=m:-n.

$$AD : DB = m : n; \quad AD' : D'B = m : -n,$$

akkor a D, D' pontokon át az ABC háromszög C szögének és C külszögének felezőjével párhuzamosan menő egyenesek szintén átmennek a keresett körök érintőpontjain.

Ha tehát C-től e és e' sugárral köröket írunk le és az elsőt a D ponton átmenő, a másodikat a D' ponton átmenő és a C szög, valamint külszögének felezőivel párhuzamos egyenesekkel metsszük, akkor a négy első metszőpont az egymást kizárólag érintő körpároknak, az utóbbi négy metszőpont pedig az egymást bezárólag érintő körpároknak érintőpontja lesz.

Hasonlókép mint a feladat második megoldásánál, úgy itt is kimutatható, hogy a körök közül általában négy mindíg valós, még pedig mindíg az egymást kizáró csoporthoz tartozó négy kör.

D, D' pontok közül ugyanis az egyik pl. D, melynél λ -t positivnek vesszük az AB vonaldarabon fekszik. Ennek távolsága C-től, mint az az ACD, BCD háromszögekből könnyen kiszámítható:

$$CD^2 = \frac{a^2 + \lambda b^2}{1+\lambda} - \frac{c^2\lambda}{(1+\lambda)^2};$$

mely kifejezés e^2-tel összehasonlítva igazolja, hogy a D pont az e sugarú körön belül fekszik és így a D ponton átmenő egyenes párok ama kört mindíg valós pontokban metszik.

Ha azonban nem ismernők a második megoldásban kimutatott ama tulajdonságot, hogy a körpárok érintőpontjai a D, D' ponton át C szög és külszögének felezőivel párhuzamosan menő egyenesen fekszenek, akkor azt következő úton is igazolhatjuk.

Nevezzük az AC, BC egyenesek az A illetve B pontban merőlegesen álló egyeneseket Ay illetve Bz-nek, ezek metszőpontját F-nek.

Rakjunk az A és B ponttól nézve Ay, Bz egyenesekre oly változó AY, BZ vonaldarabokat, hogy

$$AY : BZ = m : n$$

és osszuk YZ vonalat az X pontban akkép, hogy

$$YX : XZ = m : n.$$

Kérdés mi lesz az X pontok geometriai helye? - mert mint az X pontok szerkesztéséből látható, ezek között lesznek a kívánt körpárok érintőpontjai.

Az YZ egyenesek tudvalevőleg egy parabolát burkolnak, melyeknek az Ay, Bz és AB egyenesek is érintői, mert a változó parabolaérintők két szilárd érintőtől aránylagos részeket metszenek le.

A változó YZ egyeneseken fekvő X pontok, minthogy YZ vonaldarabot $m : n$ viszony szerint osztják szintén egy parabola érintőn, tehát egyenesen fekszenek. A változó YZ parabola érintő egyik helyzetben AB, s e helyzethez tartozó X pont D pontba esik, mert D az AB vonaldarabot $m : n$ viszony szerint osztja.

De ha a D ponton keresztül az Ay, Bz egyenesek hajlásszögeinek felezőivel párhuzamosokat húzunk, akkor ezek közül egyik az Ay, Bz-t oly Y', Z' pontokban metszi, hogy úgy az AY, AY', mint BZ, BZ', ugyanegy értelemben fekvő vonaldarabok. Tekintve, hogy $FY' = FZ'$ és

$$AY' \cdot FZ' \cdot BD = AD \cdot FY' \cdot BZ'$$

(mert $DY'Z'$ egyenes az ABF háromszög átszelője), tehát

$$AY' : BZ' = AD : BD = m : n.$$

E szerint a $DY'Z'$ egyenes is egyik helyzete a változó YZ egyeneseknek és a rajta fekvő X pontot D-vel összekötő egyenes $DY'Z'$, a keresett X pontok geometriai helye.

Minthogy az AY, BZ változó vonaldarabokat kétféleképp rakhatjuk az Ay, Bz egyenesekre és YZ-t is kétféleképp oszthatjuk az adott viszony szerint, azért két parabolát és négy egyenest kapunk, mely utóbbiak, minthogy $AC \perp Ay$, $BC \perp Bz$-re, a C szög és külszögének felezőivel is párhuzamosak.

Klug Lipót,dr.