Második megoldás [1]

I.

Az ABC háromszög A és B csúcsaiban az AC és BC oldalokat érintő körök középpontjai az Ay és Bz merőlegesekben vannak.

Legyenek az O és O_1 középpontú körök a kívánt tulajdonságúak; tehát, hogy a B, ill. A pontokban a háromszög oldalait és E-ben egymást is érintik. Ekkor

$$OB : O_1A = r : r_1 = m : n$$

hol m és n két adott távolság mértékszámai. A figyelembe vett két körnél $OO_1 = r + r_1$.

Húzzuk meg AE egyenest, mely az O középpontú kört S-ben metszi. Az OSE háromszög hasonló az O_1AE háromszöghöz, s így tehát

$$OS : O_1A = SE : AE = m : n$$

Ha c oldalt $m : n$ arány szerint osztjuk belül és kívül az osztó pontok D és D', akkor feltétel szerint

$$DA : DB = EA : ES = n : m$$

azaz DE egyenes párhuzamos BS-sel.

De BS parallel a C szöget felező átszelővel, mert $BOS = C$ és $SBO = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{C}{2} = \dfrac{\pi}{2} - SBx$, tehát $SBx = \dfrac{C}{2}$.

A D pontból a C szöget felező átszelővel párhuzamosan húzott egyenes e szerint átmegy a körök érintkezéspontján.

Az E pont meghatározására ez adatokhoz vegyük még figyelembe, hogy ez egyszersmind az AEB háromszög csúcsa, mely háromszögből ismeretes az alap és az E-nél levő szög, mely $\pi - \dfrac{C}{2}$; mert

$$SEB = \frac{1}{2} SOB = \frac{C}{2}$$

Ámde ezáltal adva van az AEB háromszög köré írható kör sugara $r'' = c \mid 2\sin\dfrac{C}{2}$, mely az ABC köré írt kör sugarával (r_0) igen egyszerű összefüggésben van. Ugyanis:

$$r_0 = \frac{c}{2\sin C} = \frac{c}{4\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

és így

$$r' = 2r_9 \cos\frac{C}{2}$$

Ha tehát a körülírt kör középpontján (G) a c oldalra merőleges C_1C_2 átmérőt rajzolunk és C_1 pontot A vagy B-vel összekötjük

$$C_1B = C_1A = r'$$

$$C_2C_1B = C_2C_1A = \frac{C}{2}$$

lévén.

Az r' sugarú kör, melynek középpontja C_1 a C szöget felező egyenessel D-ből párhuzamosan húzott egyenest E és E_3 pontokban vágja, mint a kívánt tulajdonsággal bíró két-két kör érintéspontjaiban.

E két pár kör mindig valós, mert D pont az r' sugarú kör területén belül van, s így minden rajta átmenő egyenes a kört két valós és pedig külön vált pontban metszi.

A D *harmonikus párjából* D-ből vont, DE-vel párhuzamos szelőnek az r' sugarú körel való metszései szintén két-két, a kívánt tulajdonságokkal bíró kört adnak általában, de az E_1 és E_2 metszéspontok egy kettős pontttá egyesülhetnek, vagy képzetesek is lehetnek, D' az r' sugarú kör kerületén kívül lévén, s így e körök két párja egy párrá, vagy mindkét pár lehetetlenné is válhatik.

II.

Legyen a szerkesztendő körökre az a feltétel, hogy:

$$r : r_1 = m : n \,\text{és}\, r - r_1 = O'O_1'$$

$S'O'E_1'$ háromszög hasonló $AO_1'E_1'$ háromszöghöz, hol E_1' az érintkezéspont és S' az AE_1' metszéspontja az O' középpontú körrel.

$$E_1'O' : E_1'O_1' = E_1'S' : E_1'A = r : r_1$$
$$= m : n = D'B : D'A$$

[1] Lásd jelen folyóirat első évfolyamában az 54. oldalt.

SB húrt és $D'E_1'$ szelőt húzván, ezek az elébbi aránylat szerint parellelák.

Ámde $S'B \perp BS$-re, tehát a C szöget felező irányra, mert MBS' szög $= \frac{\pi}{2}$ (hol M az $O'S'$ egyenes másik metszéspontja az O' középpontú körrel) mint félkörbe eső kerületi szög és így $D'E_1'$ is merőleges BS-re.

E_1' pont meghatározására vegyük figyelembe, hogy E_1' az $AE_1'A$ háromszög csúcsa, mely háromszögnek c oldala és E_1'-nél lévő szöge ismeretes.

Ugyanis:

$$BE_1'S' = \frac{1}{2}S'O'B = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$$

Az $AE_1'B$ háromszög köré írt kör sugara tehát

$$r'' = \frac{c}{2\cos\frac{C}{2}}$$

és ha

$$r_0 = \frac{c}{4\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

az ABC háromszög köré írt kör sugara, akkor

$$r' = 2r_0 \sin\frac{C}{2}$$

Ha ezek szerint az ABC háromszög köré írt körnek c oldalra merőleges átmérőjét szerkesztjük (C_1C_2) és C_2 pontot A vgy B-vel összekötjük, úgy:

$$C_2A = C_2B = r''$$

Az r'' sugarú körnek $D'E_1'$-tel való metszéspontjai oly két-két kör érintkezés pontjai, melyek a kívánt tulajdonságokkal bírnak.

D' pont kívül lévén a körön E_1' és E_2' pontok egy kettős ponttá egyesülhetnek, esetleg képzetesek lehetnek, azaz: az E_1' illetőleg E_2' pontban érintkező körök egy párrá egyesülhetnek, vagy lehetetlenekké válnak.

D' harmonikus párjából D-ből vont, $D'E_1'$-tel parallel szelő az r'' sugarú kört mindíg két valós és különvált pontban (E' és E_3') vágja s e pontok szintén két-két, a kívánt föltételeknek megfelelő kör érintkezéspontjai lesznek. Ez utóbbi körök mindíg valósak, mert D az r'' sugarú körön belül van.

A feladatnak a kifejtettek szerint általában nyolcz megoldása van, melyek közül négy mindíg valós. E minden körülmények közt valós körök párjai kívülről érintkeznek.

A szerkesztés tehát oda reducálódik, meglévén határozva egy-egy pár kör érintkezés pontja, hogy oly köröket szerkesztünk, melyek adott ponton átmenvén, adott egyenest adott pontban érintenek. A középpontot egyszerűen találjuk Ay, illetőleg Bz egyenes és az illető segédkörnek azon átmérője metszésében, mely az Ek meg az a, illetőleg B pontokat összekötő közös húrra merőlegesen áll.

(Szerk.)