I.

A keresett x és y távolságok mérőszámai között az

$$x^2 + y^2 = d^2 \tag{1}$$

összefüggés áll fönn, hol $d = PO$-val, a P pontnak a kör középpontjától való távolságával.

Továbbá

$$x^2 = R^2 - \frac{AC^2}{4},$$

$$y^2 = R^2 - \frac{BD^2}{4}.$$

Ezen egyenletekből

$$\overline{AC}^2 = 4(R^2 - x^2),$$

$$\overline{BD}^2 = 4(R^2 - y^2).$$

Másrészt

$$a^2 = AC \cdot BD,$$

$$a^4 = AC^2 \cdot BD^2,$$

$$a^4 = 16(R^2 - x^2)(R^2 - y^2) \tag{2}$$

Ez utóbbi egyenlet rendezve x^2 és y^2 szerint a következő lesz:

$$16x^2y^2 - 16R^2(x^2 + y^2) + 16R^4 - a^4 = 0$$

$$16x^2y^2 = a^4 - 16R^4 + 16R^4 + 16R^2d^2$$

$$x^2y^2 = \frac{a^4}{16} - R^2(R^2 - d^2) \tag{3}$$

Az (1) és (3) alatti egyenletekből következik, hogy x^2 és y^2 a következő másodfokú egyenletnek gyökei:

$$z^2 - d^2z + \frac{a^4}{16} - R^2(R^2 - d^2) = 0 \tag{4}$$

Ebből

$$z = \frac{d^2}{2} \pm \sqrt{\frac{d^4}{4} - \frac{a^4}{16} + R^2(R^2 - d^2)},$$

$$z = \frac{d^2}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{d^4 + 4R^4 - 4R^2d^2 - \frac{a^4}{4}},$$

$$z = \frac{d^2}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(2R^2 - d^2)^2 - \frac{a^4}{4}}.$$

Vagyis

$$x^2 = \frac{d^2}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(2R^2 - d^2)^2 - \frac{a^4}{4}},$$

$$y^2 = \frac{d^2}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(2R^2 - d^2)^2 - \frac{a^4}{4}}.$$

II.

Az $ABCD$ négyszög oldalai rendre a következők:

$$AB^2 = AP^2 + BP^2,$$

$$BC^2 = BP^2 + CP^2,$$

$$CD^2 = CP^2 + DP^2,$$

$$DA^2 = DP^2 + AP^2.$$

$$AP = AH - PH,$$

$$AP = \sqrt{R^2 - x^2} - y;$$

$$BP = BK - PK,$$

$$BP = \sqrt{R^2 - y^2} - x;$$
$$CP = CH + HP,$$
$$CP = \sqrt{R^2 - x^2} + y;$$
$$DP = DK + KP,$$
$$DP = \sqrt{R^2 - y^2} + x.$$

Tehát

$$AB^2 = 2R^2 - 2y\sqrt{R^2 - x^2} - 2x\sqrt{R^2 - y^2},$$
$$BC^2 = 2R^2 + 2y\sqrt{R^2 - x^2} - 2x\sqrt{R^2 - y^2},$$
$$CD^2 = 2R^2 + 2y\sqrt{R^2 - x^2} + 2x\sqrt{R^2 - y^2},$$
$$DA^2 = 2R^2 - 2y\sqrt{R^2 - x^2} + 2x\sqrt{R^2 - y^2}.$$

Hogy a föntebbi kifejezésekből az x-et és y-t kiküszöbölhessük jeleljük rendre:

$$U_1 = x\sqrt{R^2 - y^2} + y\sqrt{R^2 - x^2},$$
$$U_2 = -x\sqrt{R^2 - y^2} - y\sqrt{R^2 - x^2},$$
$$U_3 = x\sqrt{R^2 - y^2} - y\sqrt{R^2 - x^2},$$
$$U_4 = -x\sqrt{R^2 - y^2} + y\sqrt{R^2 - x^2}.$$

Az U_1 és U_2 továbbá az U_3 és U_4 a következő két másodfokú egyenlet gyökeinek tekinthetők.

$$U^2 = \left(x\sqrt{R^2 - y^2} \pm y\sqrt{R^2 - x^2}\right)^2,$$
$$U^2 = x^2(R^2 - y^2) + y^2(R^2 - x^2) \pm 2xy\sqrt{R^2 - y^2}\sqrt{R^2 - x^2}.$$

Vagy az (1) és (2) alatti egyenletek figyelembevételével

$$U^2 = R^2d^2 - 2x^2y^2 \pm \frac{a^2}{2}xy;$$

xy-t a (3) alatti egyenletből helyettesítve

$$U^2 = R^2d^2 - 2\left[\frac{a^4}{16} - R^2(R^2 - d^2)\right] \pm \frac{a^2}{2}\sqrt{\frac{a^4}{16}R^2(R^2 - d^2)},$$
$$U^2 = R^2d^2 - \frac{a^4}{16} + R^4 - R^2d^2 - \left[\frac{a^4}{16} - R^2(R^2 - d^2)\right] \pm$$
$$\pm 2\frac{a^2}{4}\sqrt{\frac{a^4}{16} - R^2(R^2 - d^2)},$$
$$U^2 = R^4 - \left[\frac{a^2}{4} \pm \sqrt{\frac{a^4}{16} - R^2(R^2 - d^2)}\right]^2 \tag{5}$$

Ebből

$$U = \pm\sqrt{R^4 - \left[\frac{a^2}{4} \pm \sqrt{\frac{a^4}{16} - R^2(R^2 - d^2)}\right]^2},$$

és a keresett oldalak négyzetei;

$$AB^2 = 2B^2 - 2\sqrt{R^4 - \left(\frac{a^2}{4} + D\right)^2},$$
$$DC^2 = 2R^2 - 2\sqrt{R^4 - \left(\frac{a^2}{4} - D\right)^2},$$
$$CD^2 = 2R^2 + 2\sqrt{R^4 - \left(\frac{a^2}{4} + D\right)^2},$$
$$DA^2 = 2R^2 - 2\sqrt{R^4 - \left(\frac{a^2}{4} + D\right)^2},$$

Hol

$$D=\sqrt{\frac{a^4}{16}-R^2(R^2-d^2)}$$

III.

Ha

$$d^2=\frac{R^2}{4}(4-\sqrt{5})$$

azaz

$$R^2-d^2=\frac{R^2}{4}\sqrt{5}$$

ha továbbá

$$\frac{a^4}{16}=\frac{R^4(5+2\sqrt{5})}{16}$$

tehát

$$\frac{a^4}{16}-R^2(R^2-d^2)=\frac{R^4(5+2\sqrt{5})}{16}-\frac{R^4}{4}\sqrt{5}=\frac{R^4}{16}(5-2\sqrt{5})$$

és

$$\sqrt{\frac{a^4}{16}-R^2(R^2-d^2)}=\frac{R^2}{4}\sqrt{5-2\sqrt{5}}$$

akkor

$$U^2=R^4-\left[\frac{R^2}{4}\sqrt{5+2\sqrt{5}}\pm\frac{R^2}{4}\sqrt{5-2\sqrt{5}}\right]^2,$$

$$U^2=R^4-\frac{R^4}{16}\left[10\pm 2\sqrt{5}\right].$$

$$U^2=\frac{R^4}{16}\left[6\mp 2\sqrt{5}\right],$$

$$U^2=\frac{R^4}{16}\left[\sqrt{5}\mp 1\right]^2,$$

$$U=\pm\frac{R^2}{4}(\sqrt{5}\mp 1).$$

Tehát

$$AB^2=2R^2-\frac{R^2}{2}(\sqrt{5}+1)=\frac{R^2}{4}(6-2\sqrt{5}),$$

$$BC^2=2R^2-\frac{R^2}{2}(\sqrt{5}-1)=\frac{R^2}{4}(10-2\sqrt{5}),$$

$$CD^2=2R^2+\frac{R^2}{2}(\sqrt{5}+1)=\frac{R^2}{4}(10+2\sqrt{5}),$$

$$DA^2=2R^2+\frac{R^2}{2}(\sqrt{5}-1)=\frac{R^2}{4}(6+2\sqrt{5}).$$

Végre

$$AB=\frac{R}{2}\sqrt{6-2\sqrt{5}}=\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1),$$

$$BC=\frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}},$$

$$CD=\frac{R}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}},$$

$$DA=\frac{R}{2}\sqrt{6+2\sqrt{5}}=\frac{R}{2}(\sqrt{5}+1).$$

Szerk.

Pollák Sándor, főgymn. VII. oszt. tanuló, Győr.