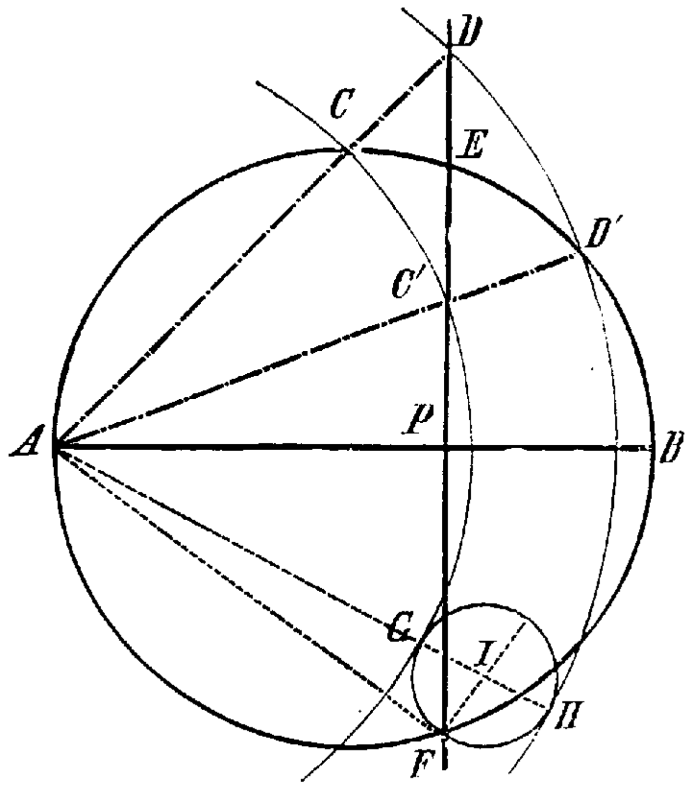
I.

Tegyük fel, hogy

$$0 < a < 2R.$$



Feladatunk értelmében a $CD = AD - AC = l$.

Még egy összefüggést nyerünk AD és AC között, ha az ADF és AFC hasonló háromszögekből aránylatokat írunk fel.

Minthogy ugyanis az

$$FCA\sphericalangle = AFD\sphericalangle$$

és

$$AFC\sphericalangle = FDA\sphericalangle,$$

az

$$AF : AD = AC : AF$$

vagyis

$$AD \cdot AC = AF^2 = 2Ra.$$

Emeljünk AF egyenesre az F pontban merőlegest s erre vigyük rá az $FJ = \dfrac{l}{2}$ távolságot, továbbá az J-ből mint középpontból $\dfrac{l}{2}$ sugárral rajzoljunk kört, mely az AJ egyenest messe a G és H pontokban.

Ekkor

$$AF^2 = AH \cdot AG$$

és

$$AH - AG = l.$$

Vagyis

$$AH = AD$$

és

$$AG = AC.$$

Ha tehát az A pontból mint középpontból köröket írunk le, ezek az adott kört és egyenest a keresett C és D', az egyenest C' és D pontokban metszik.

Ha

$$l < 2R - a$$

az AG sugarú kör az adott kört C és C_1, az PD egyenest D' és D'_1 pontokban metszi.

Az AH sugarú kör pedig az adott kört C' és C'_1, az AC egyenest pedig D és D_1 pontokban metszi.

$$C \text{ és } D$$
$$C' \text{ és } D'$$
$$C_1 \text{ és } D_1$$
$$C'_1 \text{ és } D'_1$$

összetartozó pontpárok.

Ha

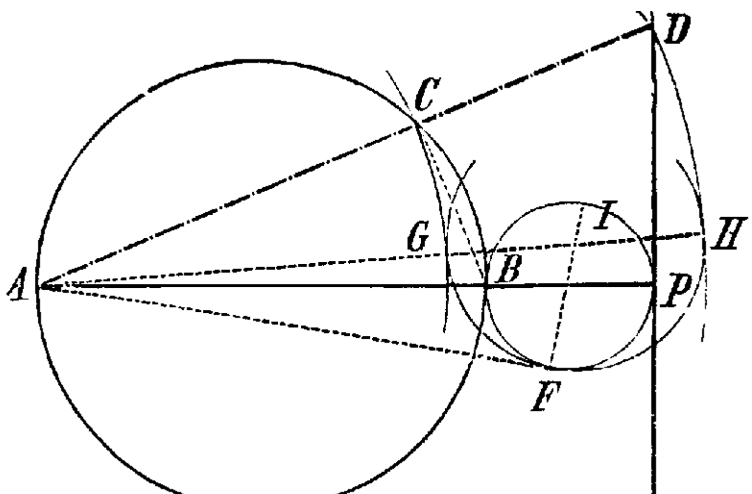
$$1 > 2R - a$$

az AG sugarú kör csak az adott kört és az AH sugarú kör csak a PD egyenest metszi át.

II.

Tegyük fel másrészt, hogy

$$a > 2R > 0$$



Rajzoljuk meg a kört, melynek középpontja a BP egyenes tartomány felező pontja s mely a B és P pontokon keresztül megy s húzzunk ehhez az A pontból érintőt AF-et.

Ekkor

$$AF^2 = AB \cdot AP = 2R(a - 2R)$$

Másrészt az ABC és APD háromszögek hasonlóságából következik, hogy

$$AB : AC = AD : AP$$

$$AC \cdot AD = AB \cdot AP = \overline{AF}^2 = 2R(a - 2R).$$

Ha tehát az AF egyenesre az F pontban merőlegest emelünk, s erre az $AJ = \dfrac{l}{2}$ hosszúságot felvisszük és az J-ből mint középpontból $\dfrac{l}{2}$ sugárral kört írunk le, ez az AJ egyenest G és H pontokban metszi, melyekre nézve a következő egyenletek állanak fenn:

$$AH - AG = l$$

és

$$AH \cdot AG = AF^2 = 2R(a - 2R).$$

Vagyis ismét

$$AH = AD$$

és

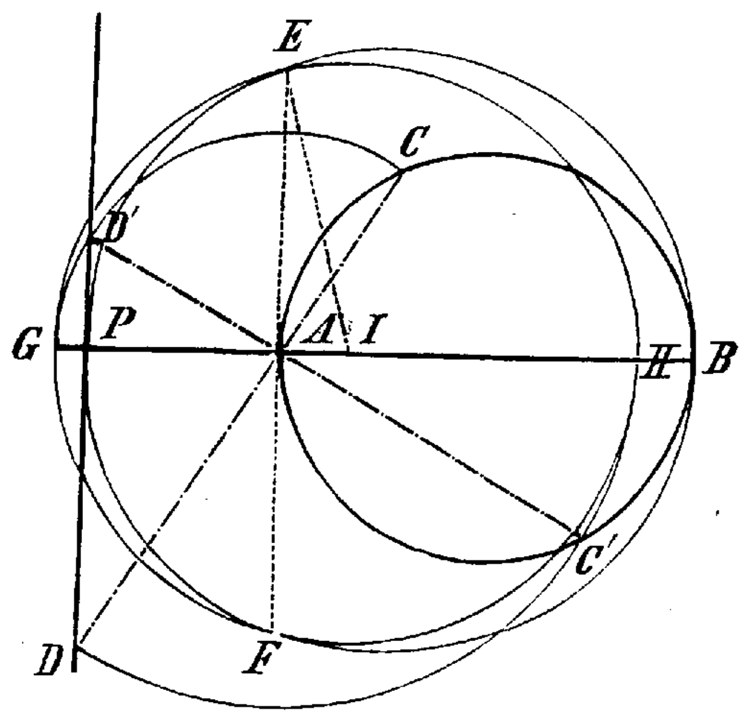
$$AG = AC.$$

Az AG sugarú kör az adott kört és az AH sugarú kör az AP egyenest csak akkor metszi át valós pontokban, ha $l > (a - 2R)$

III.

Legyen

$$0 > a > -2R$$



Rajzoljuk meg a kört a B és P pontokon keresztül,melynek középpontja a BP egyenes tartomány felező pontja s húzzuk meg ebben az $AF \perp BP$ húrt.

$$AF^2 = AB \cdot PA = -2Ra.$$

Ha az F ponton keresztül kört rajzolunk, melynek sugara $\frac{l}{2}$ s középpontja J a BP egyenesen fekszik, ez a BP egyenest G és H pontokban metszi, melyekre nézve a következő egyenletek állanak fenn:

$$AH + GA = AH - AG = l$$

$$GA \cdot AH = \overline{AF}^2 = -2Ra$$

Minthogy itt

$$AD - AC = l$$

$$AD \cdot CA = AH \cdot GA = AF^2 = -2Ra.$$

AG és AH nem egyebek a keresett AC és AE egyeneseknél.

Látjuk, hogy itt

$$l \geq 2AF,$$

$$l^2 \geq 4AF^2,$$

$$l^2 \geq -8Ra.,$$

Ha

$$\frac{l}{2} < \frac{2R-a}{2}$$

$$l < 2R - a$$

az AG és AH sugarakkal leírt körök az adott kört valamint a PD egyenest átmetszik. Ha

$$l > 2R - a$$

az AG sugarú kör csak az adott kört és az AH sugarú kör csak a PD egyenest metszi.

IV.

Legyen végre

$$a < -2R < 0$$

akkor a szerkesztés azonos marad ugyan a III. részben leírttal, de csak akkor kapunk valós C és D metszéspontokat, ha

$$l > 2R - a$$