Az

$$F(x)=0$$

egyenlet gyökei akkor lesznek a 0 és $2R$ határok közé szorítva, ha egyidejűleg

$$F(0)\cdot F(2R)>0 \tag{1}$$

$$0<\frac{l^2+4aR}{4R}<2R. \tag{2}$$

Vagyis ha $F(0)$ és $F(2R)$ egyenlő előjelűek és a gyökök félösszege 0 és $2R$ között fekszik.

Minthogy az $F(x)=0$ egyenlet gyökeinek közös alakja:

$$x=\frac{l^2+4aR\pm\sqrt{(l^2+4aR)-16a^2R^2}}{4R},$$

$$x+\frac{l^2+4aR\pm\sqrt{(l^4+8l^2aR)}}{4R},$$

$$x+\frac{l^2+4aR\pm l\sqrt{(l^2+8aR)}}{4R},$$

s ezek akkor lesznek valósak, ha

$$l^2+8aR\geq 0,$$

$$l^2\geq -8R.$$

I.

Tegyük fel először, hogy

$$a>0;$$

ekkor l^2 mindig nagyobb a $-8aR$-nél.

Minthogy

$$F(0)=2Ra^2>0,$$

az

$$F(2R)=2R\left[4R^2-l^2-4aR+a^2\right]=2R\left[(2R-a)^2-l^2\right]\text{-nek}$$

is nagyobbnak kell lennie 0-nál, vagyis minthogy $2R$ pozitív

$$(2R-a)^2-l^2>0,$$

$$l^2<(2R-a)^2. \tag{1}$$

A (2) alatti feltétel új alakja lesz

$$0<l^2+4aR<8R^2,$$

$$-4aR<l^2<8R^2-4aR,$$

$$-4aR<l^2<4R(2R-a). \tag{2}$$

Ez utóbbi egyenlőtlenségek közül az első minden pozitív a-nál fennáll, a második azonban csak akkor, ha $2R-a>0$, vagyis ha $a<2R$.

Ez utóbbi esetben azonban

$$(2R-a)^2<4R(2R-a)$$

és a *szükséges* és *elegendő* feltételei annak, hogy az $F(x)=0$ egyenlet gyökei a 0 és $2R$ között feküdjenek, midőn $a>0$, a következők:

$$a<2R, \tag{3}$$

$$l^2<(2R-a)^2. \tag{4}$$

Ha $a>2R$ és $l^2<(2R-a)^2$ akkor az $F(x)=0$ egyenlet egy gyöke sem fekszik a 0 és $2R$ között. Ha $l^2>(2R-a)^2$ és $a\neq 2R$, akkor a gyökök 0 és $2R$ értékek által *egymástól el vannak különítve.*

II.

Tegyük fel, hogy

$$a < 0.$$

Az $F(x) = 0$ gyökei tehát csak akkor valósak, ha

$$l^2 > -8aR.$$

A gyökök itt is akkor lesznek a 0 és $2R$ között találhatók, ha

$$l^2 < (2R - a)^2, \tag{1}$$

$$-4aR < l^2 < 4R(2R - a). \tag{2}$$

Ha

$$a > -2R,$$

azaz

$$-a < 2R,$$

akkor

$$2R - a < 4R$$

és

$$(2R - a)^2 < 4R(2R - a).$$

A s z ü k s é g e s és e l e g e n d ő feltételei annak, hogy az $F(x) = 0$ egyenlet gyökei a 0 és $2R$ határok között feküdjenek, negatív a esetére a következők:

$$-a < 2R, \tag{3}$$

$$l^2 < (2R - a)^2. \tag{4}$$

Ha

$$-a > 2R$$

akkor

$$-4Ra > 8R^2,$$

$$-8Ra > 8R^2 - 4Ra,$$

és

$$-8Ra > 4R(2R - a).$$

Ugyanekkor

$$2R - a > 4R$$

és

$$(2R - a)^2 > 4R(2R - a).$$

Ha tehát

$$(2R - a)^2 > l^2 > -8aR > 4R(2R - a)$$

akkor az $F(x) = 0$ egyenlet egy gyöke sem fekszik 0 és $2R$ között.

Ha végre

$$l^2 > (2R - a)^2$$

és

$$-a \neq 2R,$$

akkor a 0 és $2R$ a gyököket elkülönítik egymástól.

III.
Összefoglalás.

I.

$$a > 0,$$

1)

$$a < 2R$$

$$\underline{l^2 < (2R - a)^2}$$

akkor

$$0 < x' < x'' < 2R;$$

hol x' és x" az $F(x) = 0$ egyenlet gyökeit jelentik.

2)

$$\frac{a > 2R}{l^2 < (2R-a)^2}$$

akkor

$$0 < 2R < x' < x''.$$

3)

$$\frac{a \neq 2R}{l^2 > (2R-a)^2}$$

akkor

$$0 < x' < 2R < x''.$$

II. $a < 0$ és $l^2 > -8aR.$

1)

$$\frac{a > -2R}{l^2 < (2R-a)^2}$$

akkor

$$0 < x' < x'' < 2R$$

2)

$$\frac{a < -2R}{l^2 < (2R-a)^2}$$

akkor

$$0 < 2R < x' < x''.$$

3)

$$\frac{a \neq -2R}{l^2 > (2R-a)^2}$$

akkor

$$0 < x' < 2R < x''.$$

III.

$a < 0$ és $l^2 < -8aR$, akkor x' és x'' conjugált complex értékek.