A kérdésre annak alapján tudunk választ adni, hogy egyrészt a számjegyek számát határozzuk meg, másrészt a kérdezett szám maradékát, ha 9-cel osztjuk.

Jelöljük a 2^{1991} számot K-val.

$$K = 8^{\frac{1991}{3}} < 10^{664}.$$

A K szám tehát legfeljebb 664 jegyű, s így jegyeinek az összege nem több mint $664 \cdot 9$, ami 6000-nél kisebb. Eszerint $f_1(K) < 36 \cdot 10^6$. Eddig a korlátig a 29 999 999 szám jegyeinek az összege a legnagyobb, 65. Így

$$f_2(K) \leq 4225.$$

Hasonlóan számolva

$$f_3(K) \leq (3 + 3 \cdot 9)^2 = 900.$$

Egy legfeljebb háromjegyű k számra $f_1(k) \leq (3 \cdot 9)^2 = 729$, tehát szintén legfeljebb háromjegyű. Így, ha $n \geq 3$, akkor $f_n(K)$ legfeljebb háromjegyű.

Ismeretes, hogy egy szám 9-cel osztva ugyanannyi maradékot ad, mint a számjegyeinek az összege; továbbá két szám szorzatának a maradéka, ha 9-cel osztunk, ugyanannyi, mint a maradékaik szorzatáé, mivel $(9r+s)(9t+u) = 9(9rt + ru + st) + su$. Ezek alapján

$$K = 2^{6 \cdot 331 + 5} = 64^{331} \cdot 32 = (9 \cdot 7 + 1)^{331}(9 \cdot 3 + 5)$$

maradéka 5, s így ennyi a számjegyei összegének a maradéka is. $f_1(K)$ maradéka tehát annyi, mint 25-é, azaz 7; $f_2(K)$ maradéka annyi, mint 49-é, vagyis 4; $f_3(K)$ maradéka annyi, mint 16-é, ami 7. Ennyi a maradéka a számjegyei összegének is, és a szám legfeljebb háromjegyű, így a számjegyek összege csak 7, 16 és 25 lehet. $f_4(K)$ lehetséges értékei 49, 256 és 625. $f_5(K)$ értéke már mind a három esetben ugyanaz: 169. Folytatva a számolást

$$f_6(K) = 256, \quad f_7(K) = 169, \quad f_8(K) = 256.$$

Világos, hogy innen periodikusan páros indexre 256-ot kapunk, páratlanra 169-et. A feladat kérdésére tehát a válasz

$$f_{1992}(2^{1991}) = 256.$$

Megjegyzések. 1. Természetesen más a-ra, c-re és n-re is meghatározható hasonlóan $f_n(a^c)$, és könnyen látható, hogy elég nagy n-re 169-en és 256-on kívül csak az 1 és a 81 fordul elő.

2. Számítógéppel meghatározható 2^{1991} számjegyeinek az összege, ez 2669. Innen $f_1(K) = 7\,123\,561$, $f_2(K) = 625$, $f_3(K) = 169$, $f_4(K) = 256$, és már innen ismétlődik periodikusan az utolsó két érték.