**I. megoldás.** Legyenek az adott pozitív számok $a_1, a_2 \ldots, a_n$. Tudjuk, hogy két pozitív szám közül a köbe a nagyobbnak lesz nagyobb és hasonló áll a pozitív számszorosukra is. A két közép különbsége tehát ugyanolyan előjelű, mint a köbeik különbségének $n(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^3$-szorosa.

Erre a kifejezésre $n = 2$ esetén egyszerű átalakításokkal a következő azonosságot nyerjük:

$$2(a_1^2 + a_2^2)^3 - (a_1 + a_2)^3(a_1^3 + a_2^3) = (a_1 + a_2)^3(a_1^3 - a_2^3).$$

Ha tehát $a_1 = a_2$, akkor a különbség 0, a két közép egyenlő, különben a jobb oldal két tényezője egyező előjelű, így szorzatuk pozitív; a különös közép tehát nagyobb a harmadik hatványközépnél. Eszerint két szám esetén az a) állítás igaz.

Három szám esetén viszont a c) állítás az igaz. Ennek igazolására elég megadni egyrészt három olyan számot, amelyek különös közepe nagyobb harmadik hatványközepüknél, másrészt három olyant, amelyekre a különös közép a kisebb. Az előbbi tulajdonságú az 1, 1, 2 hármas. Erre

$$3(1^2 + 1^2 + 2^2)^3 = 648, \quad (1 + 1 + 2)^3(1^3 + 1^3 + 2^3) = 640.$$

Az utóbbira példa a 2, 2, 3 hármas. Erre

$$3(2^2 + 2^2 + 3^2)^3 = 14739, \quad (2 + 2 + 3)^3(2^3 + 2^3 + 3^3) = 14749.$$

Ezzel igazoltuk az állítást.

*Megjegyzés.* Volt, aki három olyan számtól remélte, hogy a harmadik hatványközepük lesz a nagyobb, amelyek közt kicsi, egyenlő különbség van. Ez azonban nem következik be. Ha a három szám $a - b$, $a$, $a + b$, ahol $0 < b < a$, akkor a különös közép

$$\frac{(a - b)^2 + a^2 + (a + b)^2}{3a} = a + \frac{2b^2}{3a},$$

a harmadik hatványközép köbe pedig

$$\frac{(a - b)^3 + a^3 + (a + b)^3}{3} = a^3 + 2ab^2.$$

Mivel az előbbi érték köbe ezzel a két taggal kezdődik, és ehhez további két pozitív tag járul, így az ilyen számhármasoknak mindig a különös közepe nagyobb.

**II. megoldás.** Jegyezzük meg először, hogy ha a közepek nagyságviszonyát vizsgáljuk, akkor megszorozhatjuk mindegyik számot ugyanazzal a pozitív számmal, hiszen ekkor a két közép is ezzel a számmal szorzódik meg, nagyságviszonyuk tehát nem változik. Így feltehetjük, hogy a számok számtani közepe 1, mert ha nem így volna, akkor eloszthatjuk mindegyiket a számtani középpel.

Vizsgáljuk a két közép viszonyát olyan számokra, amelyek közül $n - 1$ egyenlő és kisebb mint 1, tehát $1 - c$, ahol $0 < c < 1$, az $n$ -edik pedig $1 + (n - 1)c$. Az első megoldás megjegyzésének megfelelően elég a közepek köbének a különbségét vizsgálni. Ez

$$\left(\frac{n + n(n-1)c^2}{n}\right)^3 - \frac{n + 3((n-1) + (n-1)^2)c^2 + (-(n-1) + (n-1)^3)c^3}{n} =$$

$$= 1 + 3(n-1)c^2 + 3(n-1)^2c^4 + (n-1)^3c^6 - 1 - 3(n-1)c^2 - (n-1)(n-2)c^3 =$$

$$= -(n-1)c^3(n - 2 - 3(n-1)c - (n-1)^2c^3).$$

Két szám ($n = 2$) esetén ez mindig pozitív, és jegyezzük meg, hogy ekkor az általános esettel van dolgunk, miután nincsenek egyenlő számok. Ekkor tehát az a) állítás az igaz.

Pozitív a kifejezés 2-nél nagyobb $n$-re is, ha $c$ elég nagy (de 1-nél kisebb), pl. $c = \dfrac{2}{3}$. Ha viszont $c$ kicsi, pl. $c = \dfrac{1}{4(n-1)}$, (és $n \geqslant 3$), akkor a zárójelben levő kifejezés

$$n - \frac{11}{4} - \frac{1}{64(n-1)} \geq n - \frac{353}{128} \geq \frac{384 - 353}{128} > 0.$$

Ekkor tehát a harmadik hatványközép a nagyobb.

Azt nyertük tehát, a feladatban feltettnél általánosabb kérdésre adva választ, hogy 2-nél több szám esetén mindig a c) állítás az igaz.

*Megjegyzések.* 1. A harmadik hatványközép lehet csupa különböző szám esetén is nagyobb a különös középnél. Három szám esetén pl. – kényelem kedvéért egész számokra szorítkozva – legyen két szám a 23 és a 25. Azt vehetjük észre, hogy a harmadik számot 29 és 36 közt választva a harmadik hatványközép lesz a nagyobb, viszont 28-at vagy 37-et választva már a különös közép a nagyobb.

2. Meglepő eredményt kapunk, ha azt vizsgáljuk, hogy három szám esetén a harmadik hatványközép és a különös közép hányadosa mekkora lehet. Ez a hányados a maximumát az 1, 1, $\sqrt{2}$ hármasra (és az ezzel arányosakra) veszi fel; a maximum értéke mindössze

$$\sqrt[3]{\frac{24+17\sqrt{2}}{48}}=\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{578}{576}}\right)}=1{,}00028902.$$